

Matemática en Arquitectura
Parte 2

Un aporte para la formación en Matemática de los estudiantes de Arquitectura y Urbanismo

Stella Maris Arrarás y Viviana Beatriz Cappello
(coordinadoras)

FACULTAD DE
ARQUITECTURA Y URBANISMO

e
exactas





MATEMÁTICA EN ARQUITECTURA
PARTE 2

UN APORTE PARA LA FORMACIÓN EN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE ARQUITECTURA Y URBANISMO

Stella Maris ARRARÁS
Viviana Beatriz CAPPELLO
(coordinadoras)

Facultad de Arquitectura y Urbanismo







A todos los alumnos de la carrera de Arquitectura que idean obras bellas y sólidas……

Agradecimientos

En el aporte continuo de quienes nos dedicamos a la docencia con ferviente vocación se evidencia la tarea de contribuir en el mejoramiento de poder abordar a la matemática con mayor soltura. No verla como esa disciplina inalcanzable e inentendible, sino aprovechar de todas las herramientas que brinda, para lograr resolver las situaciones reales que se presentan en la vida cotidiana. Esa tarea fue la que nos propusimos realizar, y la que no nos resultó simple. Pero el anhelo de poder brindar un texto que haga accesible los temas que nuestros alumnos necesitan para complementar su magnífica creatividad en el diseño y la arquitectura, nos mantuvo intactos en el objetivo propuesto.

En los capítulos de este libro, encontraran años de experiencia y exposición de temas, sin quitarle la rigurosidad del caso haciéndolos significativos

Deseamos manifestar un profundo agradecimiento a ellos que son los principales actores de este libro y a quienes va dirigido.

Al grupo de docentes que conforma la cátedra de matemática.

A todos los docentes que pasaron por esta cátedra, en todas sus versiones, modalidades y apellidos, dejándonos la impronta del ejemplo de docencia y el modelo a seguir.

A nuestras familias, fieles compañeros.

Muchas gracias a todos.

“Los que miran las leyes de la naturaleza como apoyo de sus nuevos trabajos, colaboran con el creador

ANTONI GAUDÍ

Índice

Capítulo 9

CAPÍTULO 6
Matrices y Grafos

Romina Istvan

Matrices

Una matriz puede definirse como un conjunto de elementos ordenados en filas y columnas. De esta manera, podemos organizarlos en tablas de una o más entradas, donde los elementos están ordenados por uno o más subíndices.

La forma de denotarla es mediante una letra mayúscula. Cada elemento se representa con la misma letra en minúscula y con dos subíndices: el primero es el número de orden de la fila contando desde arriba hacia abajo y el segundo es el número de orden de la columna, contando de izquierda hacia derecha.

En el ejemplo siguiente se visualiza la matriz A; de mxn elementos, donde m es la cantidad de filas y n la cantidad de columnas que posee.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & ..a_{ij}.. & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En notación abreviada podemos escribir:

$A = (a_{ij})$ donde i = 1,2,3,...m y j = 1,2,3....n

Con esta notación el elemento a_{23} está ubicado en la segunda fila y tercera columna.

Cuando el número de filas es distinto del número de columnas, decimos que se trata de una matriz rectangular. Cuando ambos números coinciden hablamos de matrices cuadradas.

Veamos cómo construir una matriz cuadrada de orden dos para la cual $a_{ij} = 2i - j$.

Cada elemento de la matriz se obtiene de la siguiente manera:

$a_{11} = 2(1) - 1 = 1$

$a_{12} = 2(1) - 2 = 0$

$a_{21} = 2(2) - 1 = 3$

$a_{22} = 2(2) - 2 = 2$

resultando: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

De esta manera, hemos escrito una matriz de 2 filas por 2 columnas; es decir, de orden 2x2 sin que ello signifique una operación aritmética. Cuando se trata de matrices del mismo número de filas y de columnas, como en este caso, podemos decir simplemente, que la matriz es de orden 2. Si la matriz hubiera tenido 2 filas y 3 columnas, el orden sería 2x3.

Veamos mediante otro ejemplo, una aplicación directa de las matrices, en la cual se observa cómo las mismas se utilizan para facilitar la visualización de conexiones entre distintos elementos:

En un viaje de estudio realizado por alumnos de la facultad, se han organizado cuatro grupos A, B, C, D conectados mediante equipos de radio de modo tal que A solo puede comunicarse directamente con B y D; B sólo puede comunicarse con A ; C sólo puede comunicarse con D y D puede comunicarse con A y C.

Para representar esta información utilizamos una matriz de orden 4, que nos permita representar en cada fila y columna, a un grupo en particular. Y utilizamos 0 o 1 para representar a cada elemento de la matriz, de manera de indicar si dos grupos se comunican directamente o no.

El resultado es la siguiente matriz Solución:

$$Solución = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Álgebra Matricial

Veamos algunas propiedades y operaciones entre matrices.

Igualdad

Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los elementos ubicados en la misma posición son iguales.

Veamos en este ejemplo, cómo utilizando esta propiedad podemos hallar los valores de x, y, z, w para satisfacer:

$$\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

igualando elemento a elemento correspondiente, resulta:

x + y = 3

2z + w = 5

x - y = 1

z - w = 4

Resulta un sistema de ecuaciones lineales cuya solución es: { x = 2; y = 1; z = 3; w = -1}

Suma de matrices

Si tenemos en cuenta que las filas o las columnas de una matriz pueden considerarse como vectores fila o como vectores columna, la operatoria entre matrices debe ser equivalente a las reglas de operación entre vectores. Y dado que, los vectores se suman elemento a elemento correspondiente, definimos en forma análoga la suma entre dos matrices con el agregado de que, para que dos matrices resulten *sumables* deben ser del mismo orden. La suma entre matrices de distinta dimensión no está definida.

Dadas entonces las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ ambas de orden mxn, la suma resulta ser una matriz

$C = (c_{ij})$ de la misma dimensión de los sumandos y elementos se obtienen haciendo la suma de los elementos correspondientes de las matrices dadas:

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn} \quad ; \text{ con } (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Consideremos el siguiente ejemplo. Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ ambas de orden mxn:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La suma de A + B resulta ser una matriz C, con los siguientes elementos:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

Como la operatoria entre matrices fue definida de manera análoga a la operatoria entre vectores, las propiedades de la suma entre matrices resultan idénticas a las propiedades de la suma entre vectores:

1) La suma entre matrices es una ley externa o abierta: se suman elementos pertenecientes a un determinado conjunto y el resultado es un elemento del mismo conjunto.
2) Vale la propiedad conmutativa: A + B = B + A
3) Vale la propiedad asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C
4) Existe en el conjunto un elemento neutro: (la matriz nula) A + N = A
5) Existe para cada elemento su inverso aditivo: A + (- A) = N (la suma de una matriz y su opuesto aditivo, da como resultado el elemento neutro en la operación).

Producto de una matriz por un escalar

La operación tiene las mismas características que el producto de un vector por un escalar: todos los elementos de la matriz quedan multiplicados por el escalar y se conserva la dimensión de la matriz.

Veamos su demostración:

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y el escalar β = 2,

si realizamos la operación: β A = A + A:

$$2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{bmatrix}$$

Propiedades del Producto de una matriz por un escalar

1) Es una ley externa o abierta. Se multiplican elementos que pertenecen a conjuntos distintos y el resultado se da en uno de ellos: el conjunto de las matrices del mismo orden de la matriz factor del producto.

2) Vale la propiedad asociativa: α (β A) = (α β) A

3) Es válida la propiedad distributiva respecto de la suma de escalares: (α + β) A = α A +βA

4) Es válida la propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: α (A+B) = α A + α B

5) Existe el elemento neutro para la operación; el escalar 1: 1 A = A

Veamos cómo hallar los valores de x, y, z y w que satisfacen:

$$2\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 5 \\ -1 & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ z+w & 4 \end{bmatrix} =$$

Para ello, procedemos a realizar la multiplicación por un escalar y la suma de matrices en cada término:

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & 5+x+y \\ -1+z+w & w+4 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos luego la igualdad de matrices, la igualación de sus elementos da origen al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x = x+2 \\ 2y = 5+x+y \\ 2z = -1+z+w \\ 2w = w+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = x+5 \Rightarrow y = 2+5 = 7 \\ z = w-1 \Rightarrow z = 4-1 = 3 \\ w = 4 \end{cases}$$

La solución es entonces el conjunto: { x = 2 ; y = 7; z = 3; w = 4 }

Producto entre Matrices

Es una operación cuyo resultado, si existe, depende del orden en que se coloquen los factores y sólo es posible cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

Comencemos por tratar de multiplicar una matriz fila A_{1xn} por una matriz B_{mx1}, con m=n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

Llamamos entonces producto A_{1xm} x B_{mx1} = C_{1x1} a la matriz cuyo único elemento es:

$$c = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}\, b_{m1}$$

Se trata del producto escalar entre la matriz o vector fila A_{1xm} y la matriz o vector columna B_{mx1}. Observamos que para que el producto resulte posible el número de elementos del vector fila debe ser igual al número de elementos del vector columna, lo que significa que las dimensiones de ambos vectores deben ser iguales.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vamos a calcular la operación A_{1x3} x B_{3x1} = C_{1x1}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = (3 \bullet 2 + 2 \bullet 1 + (-1) \bullet (-3)) = (6 + 2 + 3) = (11)\ C_{1x1} \ =$$

Sean ahora las matrices: $A_{mxn} = (a_{ij})$; i = {1,2,.....,m} ; j = {1,2,.......,n}

$B_{nxp} = (b_{ij})$; i = {1,2,......,n} ; j = {1,2,........,p}

Llamamos producto A_{mxn} x B_{nxp} en ese orden a la matriz C_{mxp} que tiene igual número de filas que la matriz A e igual número de columnas que la matriz B**.** Verificamos nuevamente que el número de columnas de la primer matriz (A) debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz B.

Veamos algunos ejemplos:

A_{2x3} x B_{3x2} = C_{2x2}

B_{3x2} x A_{2x3}= C_{3x3}

De la definición de estos dos productos observamos que el producto entre dos matrices no es en general conmutativo.

A_{2x3} x B_{3x1} = C_{2x1}

B_{3x1} x A_{2x3} no es posible, por ser el número de columnas de B distinto al número de filas de A.

Disposición conceptual para el producto

Dadas las siguientes matrices, realizamos A_{2x3} x B_{3x2}, obteniendo como resultado la matriz C_{2x2}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

En la intersección de la fila 1 de la matriz A con la columna 1 de la matriz B se encuentra el elemento c_{11} cuya expresión se obtiene haciendo el producto escalar:

$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31}$; con análogo razonamiento:

$c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32}$

$c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31}$

$c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23}\, b_{32}$

Propiedades del Producto entre Matrices

En general, el producto entre matrices no es conmutativo: $A\,B \neq B\,A$

1) Si, como caso particular A B = B A se dice que las dos matrices son permutables.
2) Si A B = - B A, las matrices se dicen anticonmutativas.
3) Es válida la propiedad asociativa A • (B • C) = (A • B) • C
4) Es válida la propiedad distributiva a izquierda : (A + B) • C = A • C + B • C
5) Es válida la propiedad distributiva a derecha : A • (B + C) = A • B + A • C
6) Existe un elemento neutro (la matriz identidad) **I** • A = A
7) El producto de dos matrices no nulas puede ser una matriz nula; en efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices Particulares

a) <u>Matriz Diagonal:</u> Se denomina así a una matriz cuadrada tal que, los elementos ubicados fuera de la diagonal principal son todos nulos.

Ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) <u>Matriz Escalar</u>: Es una matriz diagonal que tiene iguales todos los elementos ubicados sobre la diagonal principal.

Ejemplo:

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Matriz Identidad: Es una matriz escalar con todos los elementos de la diagonal principal iguales a la unidad.

Ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Matriz Traspuesta: Dada una matriz A, recibe el nombre de matriz traspuesta de A, A^t la matriz que se obtiene intercambiando ordenadamente filas por columnas (fila 1 por columna 1, etc.). No es necesario que la matriz sea cuadrada.

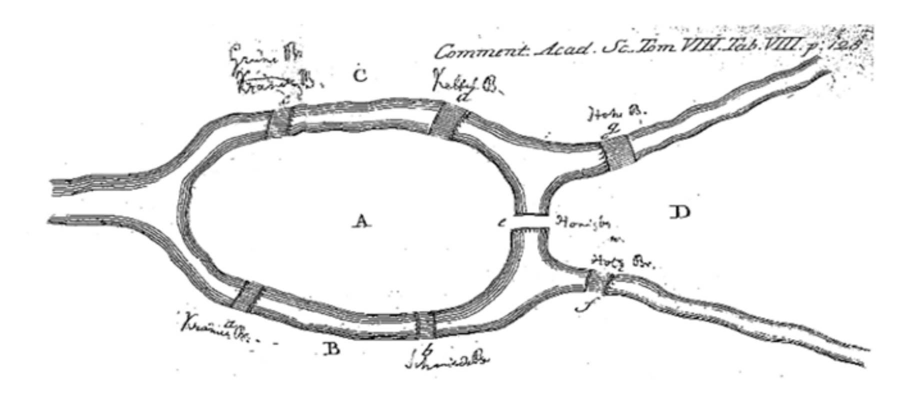
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción a la Teoría de Grafos

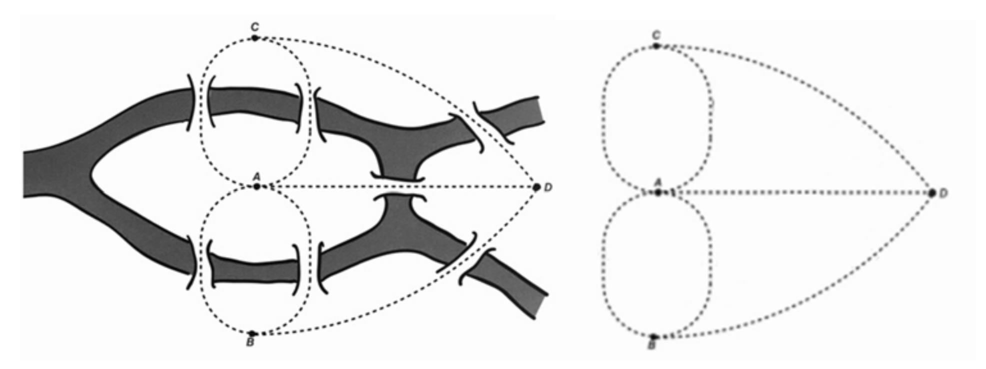
La Teoría de Grafos es una rama de la Geometría Topológica, la cual es una parte de la Matemática que estudia la interrelación de los elementos que forman un conjunto. Muchos autores coinciden en señalar al matemático suizo Leonhard Euler como uno de los padres de la Topología ya que, al analizar en 1736 el famoso "Problema de los Puentes de Königsberg" y dar como solución la "no solución del problema", revoluciona el pensamiento matemático de su época.

El problema plantea la siguiente situación. La isla Kueiphof en Konigsberg (Pomerania) está rodeada por un río que se divide en dos brazos, sobre ellos están construidos siete puentes. Resulta interesante para los habitantes descubrir un itinerario, de modo que sea posible regresar al punto de inicio, después de haber cruzado por los siete puentes, pasando sólo una vez por cada uno de ellos.



Fuente: Euler, L. (1735). Publicación original. Solution problematis and geometriam situs pertinentis. St. Petersburg Academy.

Leonard Euler (1707-1782) para estudiar el problema, representa las distintas zonas **A**, **B, C** y **D** mediante puntos, mientras que simboliza los puentes mediante líneas. A la figura la llama **grafo**, a los puntos **vértices** o **nodos** y a las líneas les da el nombre de **aristas**.



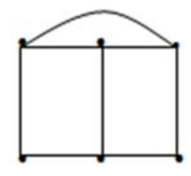
Fuente: Stewart, I. (2008) Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años.

El problema inicial se representa con el esquema anterior y consiste en verificar si partiendo de cualquiera de los cuatro puntos (A, B, C, D) puede seguirse un camino que pase por todas las curvas de una sola vez. Dicho de otra forma, el problema se reduce a estudiar si la figura puede dibujarse con un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio.

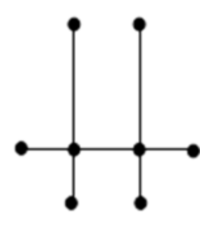
Para que ello sea posible, a lo sumo dos puntos o nodos pueden tener un número impar de caminos que lleguen a ellos, debiendo en los demás puntos concurrir un número par de caminos. En nuestro caso, todos los puntos tienen un número impar de líneas que concurren a ellos, lo que nos indica que el problema no tiene solución.

En efecto; a la isla A llegan cinco puentes; a la parte B llegan 3 puentes; a la orilla C llegan tres puentes y a la orilla D llegan tres.

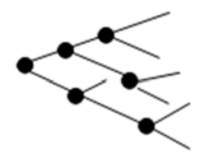
Este estudio de Euler dio origen a la Teoría de Grafos, la cual comenzó a utilizarse en problemas de representación similar:



En 1847 Gustav Kirchhoff utiliza esquemas de este tipo al trabajar con circuitos eléctricos.



Cayley en 1857 estudia la enumeración de los isótopos del compuesto orgánico CnH2n+2 usando un esquema en el que cada punto estaba unido con una o cuatro líneas de acuerdo a la valencia de enlace.



Jordan, en 1869 estudia estructuras de árbol en forma abstracta.



En 1852 Francis Guthrie plantea el problema de los cuatro colores en el que se trata de averiguar si utilizando sólo cuatro colores se puede colorear cualquier mapa, de manera que dos países vecinos nunca coincidan en color. Este problema no se resuelve hasta un siglo más tarde.

Fuente de la imagen: Octubre 2017. La Rambla de les Matemàtiques. Grafs, mapes i colors.

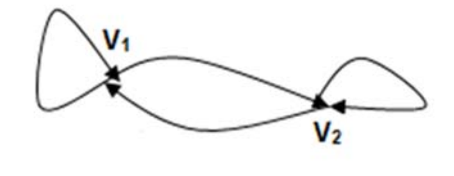
Con este nuevo enfoque, la Matemática descubre una nueva faceta que dota de libertad a sus teorías. Desde aquel momento, la solución a ciertos problemas no depende de la forma exacta de los objetos involucrados, sino de la manera en la que los elementos estudiados se relacionan entre sí.

Es por eso que en el trazado no tiene importancia ni la forma, ni la longitud de las líneas que unen los puntos, ni las ubicaciones relativas de los mismos; sólo interesa visualizar las conexiones establecidas entre ellos.

Así, la Teoría de Grafos comienza a dar resultados importantes en distintos campos de la actividad del hombre y aplicada a problemas diversos, demuestra importantes ventajas sobre algunos procedimientos analíticos. Veamos un poco de su teoría.

Teoría de Grafos

Un grafo puede representarse mediante Diagramas de Venn, diagramas cartesianos, tablas de simple entrada o de doble entrada (matrices), pero la practicidad de la representación ha hecho prevalente la utilización del denominado diagrama sagital o simplemente, grafo:



De una manera más simple y conceptual, un grafo queda definido por un conjunto de elementos v_i pertenecientes a un conjunto V y una ley de correspondencia C entre dichos elementos.

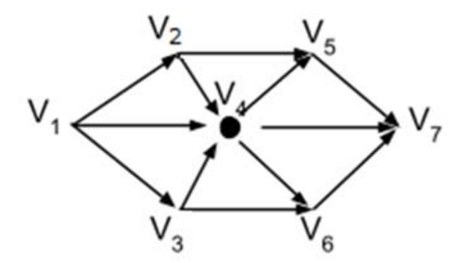
Así, por ejemplo, un Grafo V = {v_1,v_2}, con una ley de correspondencia C se expresa:

$$C(v_1) = (v_1,v_2)$$

$$C(v_2) = (v_1,v_2)$$

Los grafos pueden ser orientados o no. En los casos de ser orientado, se denomina Dígrafo.

Por ejemplo:



El conjunto de los vértices es V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7} y la ley de correspondencia:

C(v_1) = {v_2, v_3, v_4}

C(v_2) = {v_4, v_5}

C(v_3) = {v_4, v_6}

C(v_4) = {v_5, v_6, v_7}

C(v_5) = {v_7}

C(v_6) = {v_7}

C(v_7) = ϕ

Observemos que aunque existe conexión entre v_4 y v_3 estando el arco orientado no se puede ir de v_4 a v_3. Del mismo modo, el nodo v_7 está conectado con v_4, v_5 y v_6 pero no se puede avanzar en contra de cada una de las flechas. Por esta razón a la ley de correspondencia de v_7 la designamos con un conjunto vacío.

Definiciones

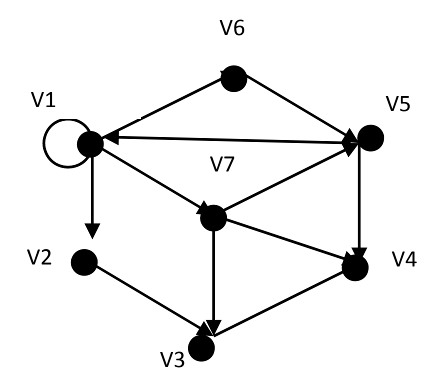
Para un grafo resulta interesante definir:

Camino: conjunto de dos o más arcos.

Circuito: camino cerrado.

Bucle: camino de un solo arco.

Longitud de un camino: es el número de arcos que lo componen.



En el grafo de la figura anterior pueden observarse varios caminos entre los nodos V_1 y V_4. Se listan a continuación algunos de ellos:

$V_1 – V_7 – V_4$

$V_1 – V_2 – V_3 – V_4$

$V_1 – V_7 – V_5 – V_4$

Escribir los otros tres caminos entre los vértices V_1 y V_4.

Circuitos v_1:

$v_1 – v_7 – v_5 – v_1$

$v_1 – v_6 – v_5 – v_1$

Bucle v_1: el bucle **$v_1 – v_1$** es único bucle del dígrafo.

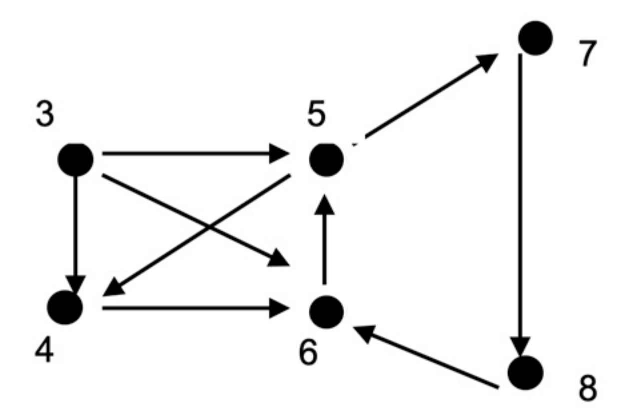
Subconjuntos de un grafo

a) Subgrafo: Si de todos los vértices de un grafo consideramos solamente algunos de ellos con todos los arcos que le corresponden en el grafo original, definimos lo que se denomina subgrafo. En otras palabras, un subgrafo tiene una parte de los vértices del grafo y conserva todos los arcos que corresponden al grafo total.

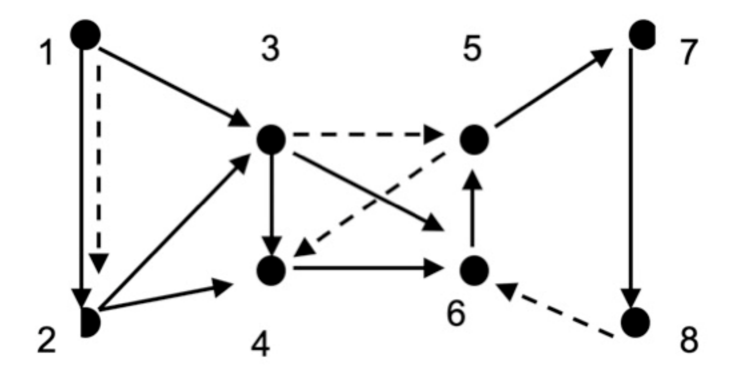
Como ejemplo, si el grafo total corresponde a la red carreteras de la República Argentina, un subgrafo puede ser la red de carreteras de la Provincia de Buenos Aires.

Para el grafo que corresponde a la siguiente figura (grafo total):

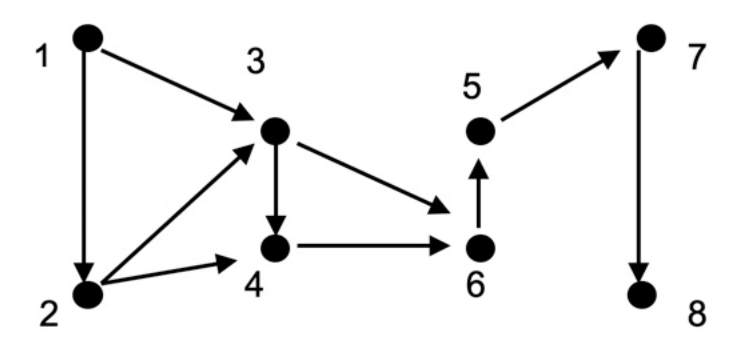
Si queremos estudiar, una red de distribución de un producto entre los puntos 3, 4, 5, 6, 7 y 8, obtendremos el subgrafo de la figura siguiente:



b) Grafo parcial: Cuando a partir de un grafo dado no varía el número de vértices, pero acotamos la ley de correspondencia entre ellos, obtenemos un grafo parcial.

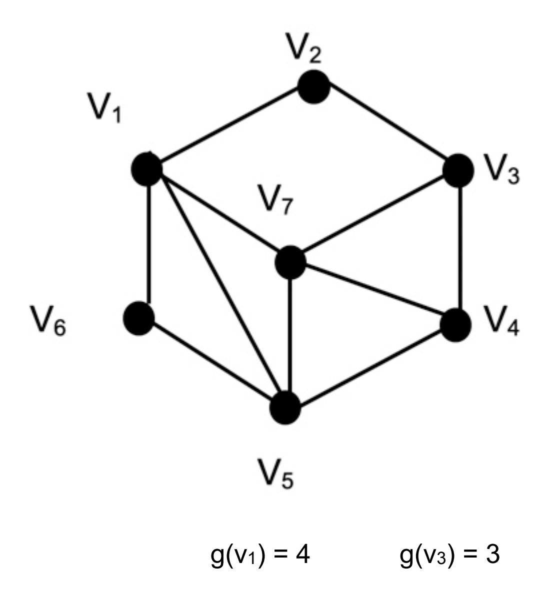


Si las flechas llenas indican las carreteras provinciales y las flechas de trazos caminos municipales, la figura siguiente es un grafo parcial:



Grado de un vértice

Si se trata de un grafo no orientado, el grado de cada uno de sus vértices es el número de arcos que llegan a él. En el grafo de la figura el grado de v_1 es cuatro y grado de v_3 es tres. Se simboliza:



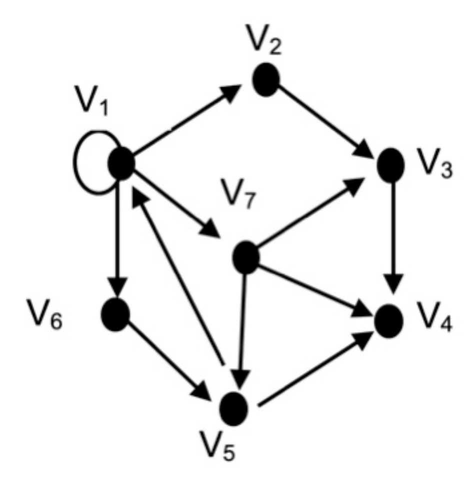
$g(v_1) = 4$ $g(v_3) = 3$

Si el grafo está orientado, deben definirse los conceptos de semigrado interior y exterior.

Obtener los grados de los vértices 1, 2, 3, 4, 5, y 6 del grafo de la figura anterior.

Semigrado interior: Es el número de arcos que inciden sobre un determinado vértice.

Semigrado exterior: Es el número de arcos que salen de él.



En este grafo el semigrado interior de v_7 es igual a uno y el semigrado exterior del mismo vértice vale 3.

Se simboliza:

$g_i\,(v_7) = 1$

$g_e\,(v_7) = 3$

Obtener los semigrados interior y exterior de los restantes vértices del grafo de la figura anterior.

Número grado de un grafo

Llamamos número grado de un grafo y lo simbolizamos g(G) el máximo de los grados de sus vértices si el grafo es no orientado y la máxima suma de los semigrados exterior e interior del mismo vértice, cuando está orientado; es decir: $g(G) = \max\,(g_e(v_i) + g_i(v_i))$.

Obtener los números de grado de los vértices del grafo de la figura anterior.

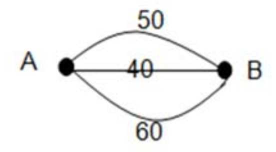
Modelización mediante grafos

En numerosas aplicaciones se utilizan representaciones gráficas para esquematizar información. Como vimos, mediante la Teoría de Grafos puede representarse gran número de situaciones que supongan relaciones entre diversos elementos:

Red valorada

Para estudiar algunos tipos de problemas, resulta útil en algunas ocasiones asociar un número o peso en cada arista de un grafo. Este grafo resultante recibe el nombre de Grafo con Peso o Grafo Ponderado. Con estos elementos podemos representar diversas situaciones; por ejemplo, las distancias entre ciudades.

Supongamos que existen dos ciudades cualesquiera A y B, y que las mismas están relacionadas entre sí mediante tres rutas. Si asignamos un valor a cada uno de los arcos, podemos decir, por ejemplo que los caminos que unen las ciudades A y B tienen 50, 40 y 60 Kilómetros respectivamente. Con un Grafo con Peso, esta situación queda representada de la siguiente manera:



En este supuesto, el valor de cada uno de los arcos indica el valor de la variable distancia. Pero también podría interesarnos el valor de otras variables distintas, como ser el tiempo que se tarda en recorrer cada camino o el costo del peaje de cada una de las carreteras. En estos casos, el peso o valor de cada arista estaría reemplazado por la nueva variable a representar.

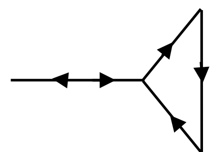
Redes de comunicación

Un grupo social puede existir como tal, sólo si sus miembros se comunican entre sí por medio de la expresión oral, escrita o de cualquier otro tipo. De esta manera, toda comunicación, cualquiera sea su naturaleza, requiere un soporte físico adecuado para poder llevarse a cabo.

El conjunto de condiciones físicas que posibilitan la comunicación en un grupo se denomina **red de comunicación**. Siguiendo con esta definición, podemos definir a una red de comunicación como un conjunto de personas A_1, A_2, A_3, etc. tales que entre algunos pares de esas personas existe posibilidad de comunicación. La comunicación entre dos elementos cualesquiera del conjunto puede establecerse en un sentido o en dos. Por ejemplo, la comunicación en dos sentidos puede efectivizarse mediante el uso de teléfono o radio, mientras que una comunicación en un sentido se presenta, por ejemplo, cuando se utiliza una señal luminosa o acústica.

Utilizamos el símbolo >> para indicar una conexión; A_i >> A_j significa que el individuo A_i puede comunicarse con A_j (en ese sentido). El único requisito que debe establecerse es: “Es falso que A_i >> A_i para todo i, esto es, un individuo no puede (o no necesita) comunicarse consigo mismo.”

Las matrices que tienen como elementos solamente ceros y unos, resultan de sumo interés en el análisis de redes de comunicación, al igual que los grafos. Mediante estos últimos, una determinada red de comunicación puede quedar expresada mediante un grafo, en el cual los individuos están representados por puntos A_1, A_2, etc... y las vinculaciones mediante flechas. Por ejemplo:



El diagrama precedente puede expresarse asimismo mediante una matriz cuadrada cuyos elementos son ceros y unos:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta matriz los elementos de la fila 1 representan respectivamente las comunicaciones entre A_1 y todos los individuos que intervienen en la red de comunicación; el 1 de la primera fila ubicado en la posición d_{12} nos indica que:

$A_1 >> A_2$ (A_1 se comunica con A_2)

La condición “Es falso que $A_i >> A_i$” se manifiesta en la matriz por el hecho de que los elementos de la diagonal principal (que tiene subíndices iguales) son todos nulos.

Tomemos ahora como ejemplo los siguientes diagramas sagitales y sus correspondientes matrices:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C_4 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En estos casos particulares, donde existe comunicación recíproca entre individuos ($A_1 >> A_2$ y $A_2 >> A_1$) no se cumple la condición que **$a_{ij} = 1$ $a_{ji} = 0$** como se puede ver, con los elementos recíprocos.

$$a_{12} = 1 \ \text{ y } \ a_{21} = 1$$

Siendo las matrices de comunicación cuadradas, podemos calcular efectuando el producto de las mismas, las potencias sucesivas, es decir C^2, C^3, etc.

Por ejemplo, si efectuamos el producto de C_3 por sí misma, resulta:

$$\begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} = C_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{siendo} \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \cdot a_{kj}$$

$$e_{11} = c_{11}c_{11} + c_{12}c_{21} + c_{13}c_{31} + c_{14}c_{41}$$

.

Un término de la forma $a_{ik} \cdot a_{kj}$ solamente puede ser distinto de cero, como ya hemos expresado, si ambos factores son distintos de ceros, es decir si ambos factores son iguales a la unidad.

Si resulta que $c_{ik} = 1$ esto significa que A_i tiene comunicación con A_k es decir ($A_i >> A_k$). Si además $c_{kj}=1$ significa que A_k tiene comunicación con A_j, es decir, ($A_k >> A_j$); resultando en consecuencia $A_i >> A_k >> A_j$, relación de *comunicación* que se denomina *Relación de comunicación en dos etapas.*

Relación de comunicación en dos etapas o de segundo orden

El número resultante del cálculo de e_{ij} expresa el número de relaciones de *Comunicación en dos etapas o de segundo orden*, lo cual significa que el individuo A_i se comunica con el individuo A_j de una o más maneras distintas.

En el ejemplo dado, por ser $c_{11} = 1$ indica que A_1 puede comunicarse consigo mismo en dos etapas, que son:

$$A_1 >> A_2 >> A_1$$

Por ser $c_{13} = 1$ indica que A_1 se comunica con A_3 en dos etapas que son:

$$A_1 >> A_2 >> A_3$$

De la misma manera por ser $c_{22} = 1$ nos indica que A_2 tiene una relación de comunicación consigo mismo, de segundo orden, es decir:

$$A_2 >> A_1 >> A_2$$

Para $c_{32} = 1$ resulta: $A_3 >> A_4 >> A_2$

Para $c_{41} = 1$ resulta: $A_4 >> A_2 >> A_1$

Para $c_{43} = 1$ resulta: $A_4 >> A_2 >> A_3$

De esta manera, todas las relaciones de comunicación de segundo orden, pueden explicitarse desarrollando el correspondiente elemento de la matriz C_3^2 o bien observando el diagrama sagital o de flechas correspondiente.

El cubo de la matriz $C^3_3 = C_3^2 \times C^1_3$ nos puede suministrar la información de tercer orden o tercer grado, de una manera completamente análoga a lo que nos suministra C_3^2 en las comunicaciones de segundo orden.

Así siguiendo, podemos calcular las potencias C_3^4, C_3^5, ... etc. de una matriz, para obtener información sobre comunicaciones entre los individuos, más indirecta, en los grupos que se estudian.

Si en lugar de utilizar la relación Se comunica con entre los individuos, ponemos como relación la expresión Elige la matriz obtenida se llamará Matriz de elección, mientras que si utilizamos la relación Domina obtendremos un estudio de Matrices de dominancia, etc.

Aplicación de matrices y grafos en el diseño arquitectónico

Como hemos expuesto, el trazado de un grafo no es un problema métrico; la forma y la longitud de las líneas que unen los puntos son indistintas, lo que interesa es visualizar las relaciones e interacciones entre ellos.

De ahí, podemos ver la importancia de la teoría de grafos en Arquitectura y Urbanismo y, en general, en todo problema de diseño.

El proceso de diseño arquitectónico plantea diversos problemas a resolver: relaciones espaciales, circulaciones, direccionalidad de recorrido, estética, interconexiones, vecindades, posición relativa respecto de fronteras determinadas, aislación sonora y demás variables que lo transforman en un proceso altamente complejo.

El diseño de un sistema de circulación requiere un acercamiento estructural en las fases iniciales, consistente en la representación de pasillos y habitaciones que pueden ser simbolizados por las aristas y nodos de un grafo.

Mediante el estudio de las relaciones de comunicación de primer y segundo orden es factible analizar las circulaciones dentro de la obra.

De la misma forma, pueden ser analizadas las conexiones visuales, las acústicas o de adyacencia.

Realizando estos estudios, en las primeras instancias del proyecto, pueden evitarse situaciones indeseables generadas por una falta de sistematización en el proceso de diseño, que se torna más necesaria, cuanto más elevada es la complejidad del proyecto.

Aplicación de matrices y grafos al problema del Camino Crítico

Otra aplicación importante de los grafos, es el cálculo del Camino Crítico. Veamos con un ejemplo, de qué se trata este concepto.

Supongamos que una fábrica elabora productos para lo cual deben efectuarse un cierto número de operaciones; cada operación necesita emplear un cierto tiempo y algunas operaciones deben ser terminadas antes de comenzar otras. El problema consiste en realizar un plan de trabajo que permita elaborar el producto en el menor tiempo posible.

Una manera de resolver este problema es mediante un grafo en el cual cada nodo representa un instante de tiempo, es decir, el comienzo o fin de una o varias tareas. Las tareas se representan mediante flechas y el peso de cada flecha indica el tiempo que demanda la operación.

Para determinar un plan óptimo deberá explorarse metodológicamente el grafo construido con el objeto de determinar un **camino crítico** que ejecute todo el proceso en el menor tiempo posible. Este camino nos indicará la **secuencia de tareas críticas**, es decir, aquellas actividades que determinarán la duración del proyecto. Cualquier demora o retraso en alguna de ellas, impactará directamente, en una demora en la finalización del proyecto.

En el siguiente apartado profundizaremos en la metodología de Administración de Proyectos, en la que se utiliza el método del Camino Crítico, basado en la Teoría de Grafos. Este método fue diseñado para facilitar la planificación de proyectos, brindando como resultado un cronograma, en el cual se pueda conocer la duración total del proyecto y la clasificación de las actividades según su criticidad.

Administración de Proyectos por Análisis de Redes

Metodología de Gestión de Proyectos

Un proyecto se define como un emprendimiento temporario, constituido por un conjunto de actividades interrelacionadas, que se lleva a cabo para alcanzar un producto o servicio determinado. Una vez definido claramente los objetivos del mismo, puede aplicarse la Metodología de Gestión de Proyectos que consta de tres etapas:

1) Planificación: En ella se establece la secuencia lógica de acontecimientos, es decir su plan. Su resultado es una red que permite realizar el cálculo del camino crítico, es decir, la secuencia de tareas críticas. Estas tareas son las que condicionan la duración total del proyecto, como ya hemos mencionado; lo que implica que cualquier retraso o

adelanto que ocurra en ellas, retrasan o adelantan la finalización del mismo. En el presente apartado profundizaremos en esta fase, viendo paso a paso cómo trabajar con los datos iniciales del proyecto hasta la generación del plan.

2) Programación: Esta etapa consiste en aplicar el calendario a la planificación obtenida en la etapa previa. Esto es, ubicar en el tiempo, el comienzo y el fin de cada una de las tareas que lo componen.
3) Control: Esta etapa, a diferencia de las dos anteriores, tiene lugar una vez que el proyecto comienza a ejecutarse. Consiste en establecer las diferencias que se verifican entre lo planeado y lo programado, por un lado, y lo efectivamente realizado, por el otro. Para ello se requiere obtener una información detallada y completa del grado de avance de las actividades. La comparación con el cronograma establecido, permite evaluar la influencia de las desviaciones y con ello, determinar las acciones a seguir para corregirlas; como consecuencia es necesario en muchas ocasiones reprogramar las actividades, recalcular los presupuestos monetarios, las necesidades de recursos, etc.

Etapa de Planificación

1) Lista de tareas

La lista de tareas o actividades está conformada por el conjunto de tareas necesarias para alcanzar el objetivo propuesto.

Se considera actividad a la serie de operaciones realizadas por una persona o grupo de personas en forma continua, sin interrupciones y con tiempos bien definidos de inicio y terminación.

2) Secuencia de Tareas

La secuencia de tareas establece el orden lógico de ejecución de las tareas.

Para su determinación, debemos tener en cuenta cuáles tareas son las iniciales; es decir, que no requieren la terminación de ninguna otra, cuales necesitan la finalización de otra u otras y cuáles se pueden realizar en paralelo.

3) Definición de la duración de cada tarea

Las estimaciones de la duración de las actividades deben realizarlas personas que estén acostumbradas a ejecutar tareas similares a la que se desea estimar. De esta manera, es más fácil comprender la complejidad de la tarea y por tanto el tiempo que se necesita para completarla.

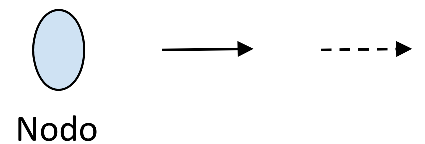
4) Elementos de la red

El grafo o red es la representación gráfica de las actividades en la cual se visualizan sus eventos, secuencias e interrelaciones.

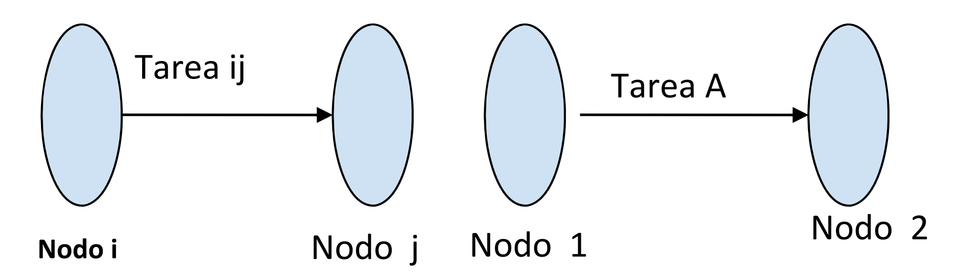
La red está compuesta por tres elementos:

- Círculo: representa un evento, acontecimiento, momento o instante de tiempo.

- Flecha Llena: representa una tarea o actividad, se identifican por una flecha que se inicia en un evento y termina en otro.
- Flecha de Trazos: representa una tarea ficticia. Se denomina así, a una tarea que no tiene duración pero que necesariamente debe ser incorporada a la red para representar correctamente las dependencias entre tareas, sin violar ninguna de las leyes de su construcción.

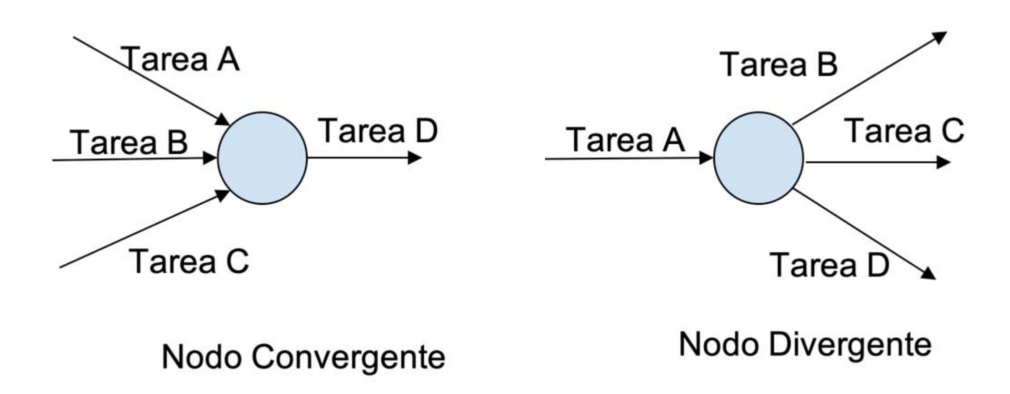


Una actividad debe tener su origen en su nodo inicial y terminar en su nodo final. Así, de manera general, nombramos con la letra i al nodo inicial, y con la letra j al nodo final. En consecuencia, la tarea definida por esos nodos, se denota como Tarea ij.



No es importante las formas de las flechas, ya que pueden representarse de acuerdo con las necesidades y comodidad de presentación de la red. Pueden ser horizontales, verticales, ascendentes, descendentes curvas, rectas, o quebradas.

Existen casos en que a un nodo pueden llegar varias tareas, o flechas, en ese caso, estamos en presencia de un nodo convergente. De la misma manera, más de una tarea puede iniciarse en un mismo momento o instante (nodo), en ese caso, el nodo se llama divergente.



Un acontecimiento sin actividades de entrada es un acontecimiento inicial, y representa el instante de inicio del proyecto. En tanto que un nodo sin actividades de salida es un acontecimiento final e indica el momento de finalización del proyecto.

Para su identificación, se enumeran los acontecimientos de un proyecto mediante números positivos preferentemente consecutivos.

5) Construcción del Diagrama de Red

Las siguientes constituyen las reglas fundamentales de construcción de los Diagramas de Red que preparan el grafo para la determinación del Camino Crítico.

i. Cada tarea debe figurar solo una única vez en el diagrama.

ii. Cada tarea debe quedar perfectamente definida por su nodo origen y su nodo destino.

iii. Un acontecimiento es alcanzado sólo cuando todas las actividades que a él concurren han terminado.

iv. Ninguna actividad puede comenzar antes de que su nodo inicial haya sido alcanzado.

v. Un acontecimiento sólo puede producirse una única vez, por lo tanto, no puede haber ciclos.

vi. Todo acontecimiento tiene por lo menos una tarea que a él llega y una que en él tiene su origen. Excepto, el nodo inicial y el nodo final.

vii. Las flechas deben dirigirse de izquierda a derecha.

Consideremos ahora, el siguiente listado de tareas, con su duración y dependencia entre actividades:

Tarea	Duración	Dependencia
A	5	-
B	3	A
C	4	A
D	2	A
E	2	B, C
F	7	D, E

Veamos los pasos para la construcción de la red.

Para comenzar a graficar ubicamos el nodo inicial a la izquierda y a partir de allí, la tarea A que no depende de ninguna otra.

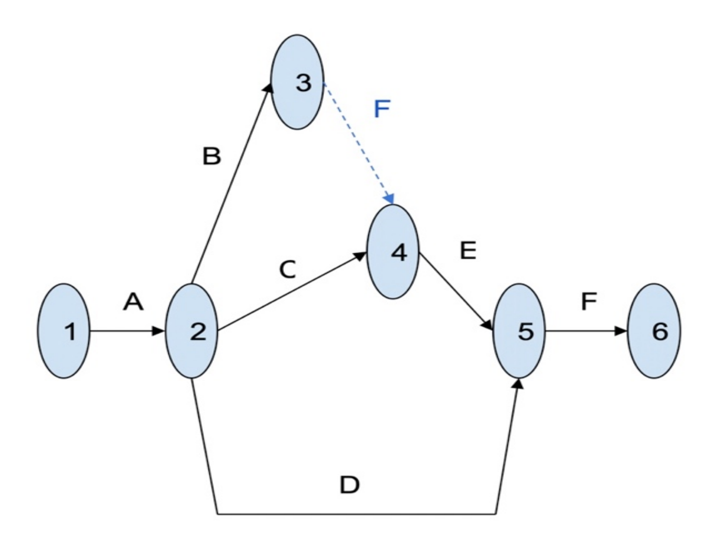
Una vez que finaliza A, representamos las tareas B, C y D, ya que las mismas solo requieren que la tarea A haya culminado.

Como B y C tienen un origen común y concurren también a un destino común, incorporamos un nodo adicional (nodo número 3) y una tarea ficticia F1. De ese modo, logramos identificar a las tareas B y C con pares diferentes de nodos y así representarlas sin violar ninguna regla de construcción del diagrama.

Una vez que B y C han terminado, podemos representar la tarea E, que depende de ellas dos.

Como F depende de E y D, y ya se encuentran representadas, las haremos concurrir a un destino común, que es también, el nodo inicial de la tarea F.

F es una tarea final, ya que de ella no depende ninguna otra actividad. Por lo tanto, su nodo destino representa el nodo salida de la red, es decir, el instante en que finaliza el proyecto.



6) Fechas Tempranas y Fechas Tardías

Antes de realizar el cálculo del camino crítico definimos algunos conceptos que nos sirvan para comprender el significado del mismo.

Dado un nodo, se define como Fecha Temprana (Ftemp) al instante mínimo necesario para alcanzarlo. Es decir, representa el instante mínimo en que finalizan todas las tareas que llegan al nodo y por consiguiente también representa el tiempo más temprano para comenzar la o las tareas que parten del nodo.

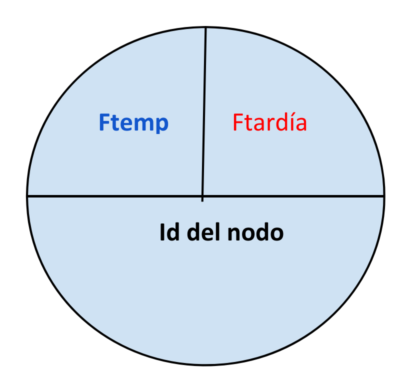
Visualmente la Fecha Temprana se coloca en la parte superior izquierda del nodo.

El nodo inicio del proyecto por no tener tareas que llegan a él, posee Fecha Temprana nula.

Se define como Fecha Tardía (Ftardía) de un nodo al instante máximo permisible para alcanzarlo. Es decir, representa el instante más tardío para finalizar las tareas que llegan al nodo y por consiguiente también representa el tiempo más tardío para comenzar la o las tareas que parten del nodo sin producir retrasos en el tiempo de finalización del proyecto.

Visualmente la Fecha Tardía se coloca en la parte superior derecha del nodo.

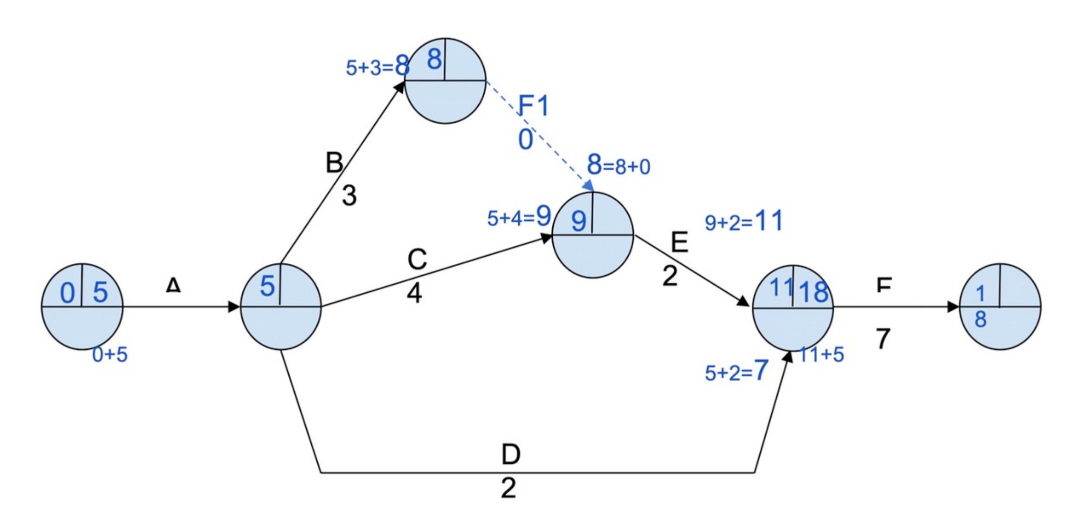
El nodo final del proyecto por no tener tareas que partan de él posee Fecha Tardía igual a su Fecha Temprana.



El proceso para calcular las Fechas Tempranas se realiza en una recorrida de los nodos y tareas de izquierda a derecha y es el siguiente:

1) Se comienza colocando un tiempo cero a la Fecha Temprana del nodo inicial. Esto indica, que las tareas que parten de ese nodo pueden comenzar a ejecutarse inmediatamente luego del inicio del proyecto; lo cual, es correcto ya que las mismas no tienen tareas precedentes.
2) Luego de esto, se va sumando la duración de cada actividad acumulándose en cada evento. Cuando dos o más actividades convergen en un nodo se toma la duración mayor como Fecha Temprana del nodo.
3) Como regla práctica, la Fecha Temprana de un nodo, queda definida como el número máximo de las puntas de flecha que llegan al nodo.

Ejemplo:



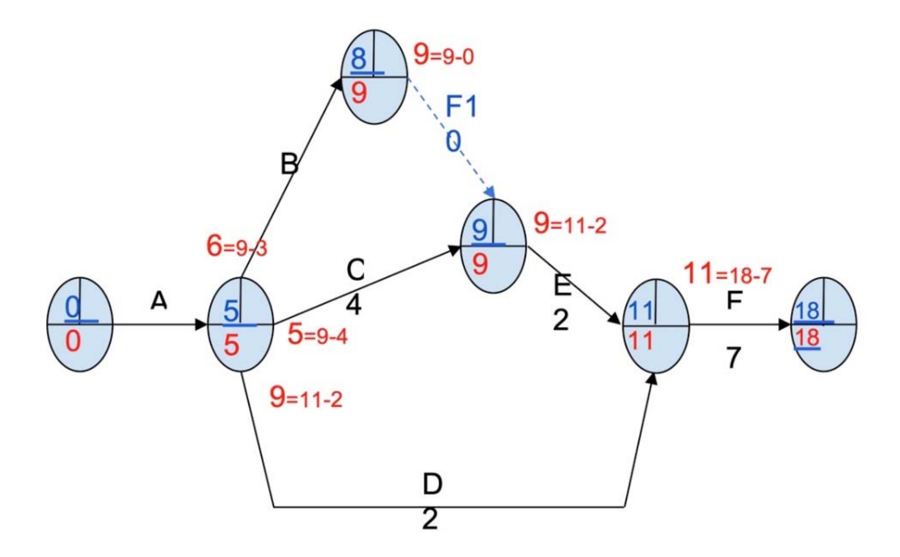
Una vez que hemos llegado al último nodo con los cálculos, podemos observar que la Fecha Temprana del nodo final representa el instante en que finaliza el proyecto.

Si las estimaciones de tiempo de las tareas están calculadas en días, entonces nuestro proyecto necesitará 18 días para ejecutarse según nuestra planificación. Si las duraciones de las tareas están calculadas en meses, entonces nuestro proyecto necesitará 18 meses para culminar. Es importante tener en cuenta las unidades de tiempo que hayamos tomado de referencia, las cuales se deben mantener en las estimaciones para todas las actividades.

El proceso para calcular las Fechas Tardías se realiza en una recorrida de los nodos y tareas de derecha a izquierda y es el siguiente:

1) El nodo final del proyecto posee una Fecha Tardía igual a la Fecha Temprana.
2) Se calcula para cada actividad la Fecha tardía del nodo de finalización de la tarea menos la Duración de la tarea. Si de un nodo divergen dos o más tareas, la Fecha Tardía del nodo es el menor tiempo calculado para las tareas que parten de él.
3) Como regla práctica, la Fecha Tardía de un nodo, queda definida como el número o tiempo mínimo de los inicio de flecha que salen del nodo.

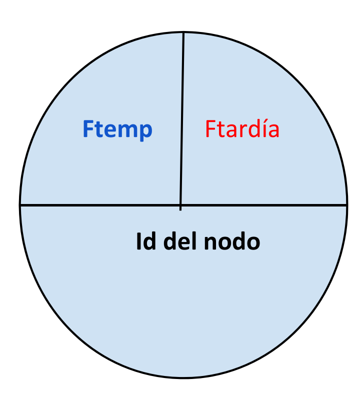
Para el ejemplo, los cálculos son:



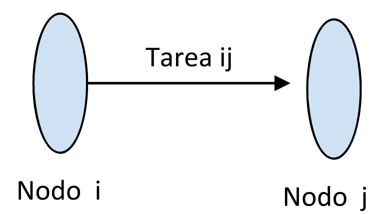
7) Margen Total de Nodos y Tareas. Cálculo del Camino Crítico

Se define como Margen Total de un nodo al intervalo de variación temporal limitado por la diferencia entre su Fecha Tardía y su Fecha Temprana.

Los nodos críticos de una red son aquellos que poseen su Margen Total nulo.



Hemos representado a una tarea Tij de modo general, como una actividad representada entre el nodo de inicio i, y el nodo final j. Ello significa que la Tarea ij, tiene su origen en el nodo i, y finaliza en el nodo j.



El tiempo máximo para realizar la Tarea ij, es la diferencia entre la Fecha Tardía de su nodo final (Ftardía j) menos la Fecha Temprana de su nodo inicial (Ftemp i).

Se define como Margen Total de una Tarea a la diferencia entre tal tiempo máximo y su Duración.

De esa manera la fórmula del cálculo para el Margen Total de una Tarea ij general es:

MT Tij = Ftardía j - Ftemp i - Duración Tij

Cuando esta operación es igual a cero, estamos en presencia de una Tarea Crítica.

De esta manera, vemos como las Tareas Críticas son aquellas que condicionan la duración del proyecto. Cualquier retraso o adelanto en una de ellas incide directamente como retraso o adelanto en la finalización del proyecto.

A continuación, calculamos los Márgenes Totales de nodos y tareas de nuestro ejemplo:

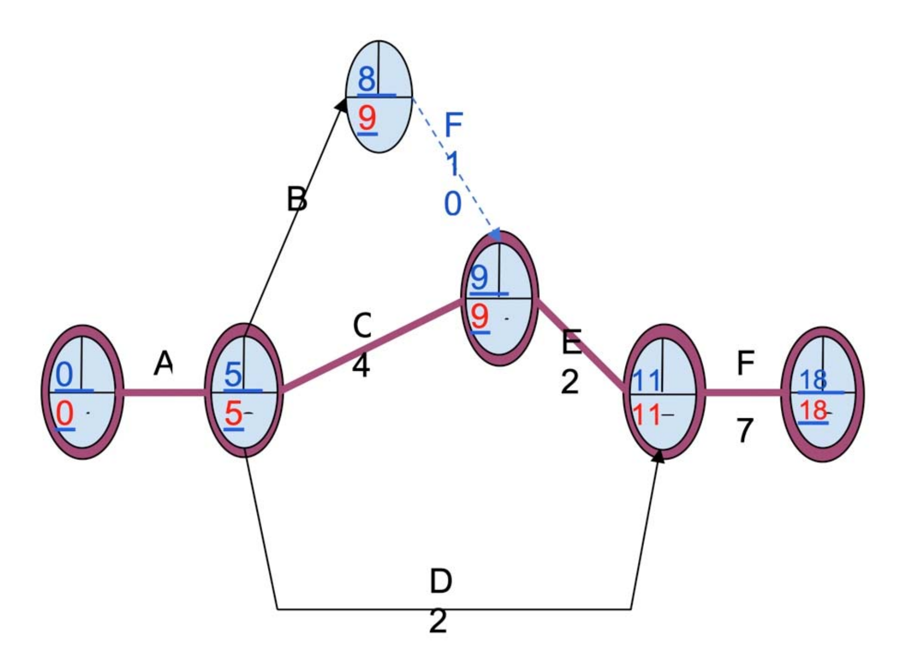
Nodo ID	F tardía	Ftemp	Margen Total
1	0	0	0 *
2	5	5	0 *
3	9	8	1
4	9	9	0 *
5	11	11	0 *
6	18	18	0 *

Los nodos 1, 2, 4, 5, 6 son entonces nodos críticos.

Tarea	Tij (nodos)	Ftardia j	Ftempi	Duración	Margen Total
A	1-2	5	0	5	0 *
B	2-3	9	5	3	6
C	2-4	9	5	4	0 *
D	2-5	11	5	2	4
F1	3-4	9	8	0	1
E	4-5	11	9	2	0 *
F	5-6	18	11	7	0 *

En la tabla anterior podemos observar que cuatro de las tareas planificadas son críticas, ya que su Margen Total resulta ser nulo.

La secuencia de tareas críticas representa el Camino Crítico. Para nuestro ejemplo: A-C-E-F; es decir, sólo 4 tareas condicionan la duración del proyecto. Gráficamente:



Ventajas de la metodología

Seguidamente, enumeramos las ventajas o cualidades de planificar por el método del camino crítico:

- Es un método sencillo en su confección y aplicación metodológica.
- Permite visualizar las interrelaciones entre las diversas etapas u operaciones.
- Predice los tiempos de finalización de la obra o trabajo.
- Permite visualizar las coordinaciones necesarias.
- Enfoca la atención sobre las tareas críticas.
- Fija la importancia del atraso de una tarea determinada.
- Tiene una planificación flexible.
- Permite la subdivisión del trabajo de planeamiento, dividiendo la red en subredes.

Herramientas de software para Administración de Proyectos

Existen en el mercado innumerables sistemas y aplicaciones para administrar los proyectos, entre los cuales se encuentra el “Microsoft Project”, como uno de los más populares.

Presenta como pantalla inicial y principal la grilla Actividades, en la cual se cargan las tareas que conforman el proyecto. Los datos a consignar son: Denominación, Duración, Precedentes (o día de inicio o fin programado, según la necesidad). Asimismo permite asignar recursos, como ser mano de obra, máquinas a utilizar o comprar, y cualquier otra necesidad.

Algunas otras herramientas similares son:

1. Gantter, integrada con Google Drive
2. TaskJuggler
3. Sinnaps
4. Collabtive
5. GanttProject
6. Wrike
7. Redbooth
8. Jira Software

Con cualquiera de estas aplicaciones y herramientas es muy sencillo realizar cambios y modificaciones en la planificación. Con solo cambiar un dato en pantalla (como puede ser una duración de tarea, o dependencia), el programa se ocupa de realizar nuevamente los cálculos, retornando el nuevo plan de manera automática.

Debemos remarcar que esta es la principal ventaja de las herramientas informáticas aplicadas al método del Camino Crítico, ya que reemplazan el cálculo tedioso y manual al usuario. Esto permite introducir modificaciones o variaciones en las redes o planes y obtener rápidas respuestas, contribuyendo aún más a la eficacia del método.

Bibliografía

Ayres, J. (1991). *Teoría y problemas de matrices.* México: MacGraw-Hill.

Cappello, V (2017). *Antromática. Aporte para la formación en Matemática de estudiantes de Antropología y profesorado de Biología.* Argentina: Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP).

Euler, L. (26 de agosto de 1975). Solution problematis and geometriam situs pertinentis. St. Petersburg Academy.

Guerrero Cortina, F. (2014). *Introducción a las matemáticas para arquitectos*. Recuperado de: https://books.google.com.ar/

Ibarra, E. (1976). *Introducción a la Investigación Operativa.* Capítulo 6: Administración de Proyectos por Análisis de Redes, 95-117. Buenos Aires: Marymar.

Nottoli, H. (1998). Teoría de grafos. Aplicaciones al diseño arquitectónico. *Revista Educación Matemática*, *10*(3), 109-127.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años.* Recuperado de https://es.scribd.com/doc/148927431/Historia-de-las-matematicas-en-los-ultimos-10000-anos-Ian-Stewart-pdf

Webgrafía

http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E053.pdf Accedido en noviembre de 2017.

http://blogscat.com/a/larambladelesmatematiques/es/2017/10/22/grafs-mapes-i-colors/ Accedido en noviembre de 2017.

http://materias.fi.uba.ar/7131/pub/05Planif%20Prog%20de%20talleres%20(Cam%20critico)/05-teo-Planif%20y%20program%20de%20talleres-040914.doc Accedido en diciembre de 2017.

CAPÍTULO 7
Vectores

Viviana Cappello

Magnitudes escalares y vectoriales

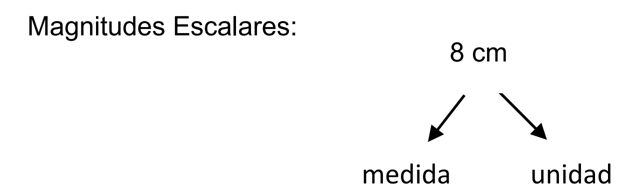
Hay magnitudes que quedan determinadas dando un solo número real. Por ejemplo: la longitud de una regla, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Tales magnitudes se llaman escalares, y pueden ser representadas sobre la recta real mediante un número que indica su medida. Otros ejemplos de escalares son: la densidad, el volumen, el trabajo, la potencia.

Para otras magnitudes, en cambio, no es suficiente dar un número para determinarlas. Para la velocidad en un punto, por ejemplo, no basta conocer su intensidad, sino que hace falta conocer además la dirección y el sentido con que el punto se mueve. Lo mismo que con la velocidad ocurre con la fuerza, con el campo eléctrico, etc.

Son magnitudes en las que su efecto depende no sólo de la intensidad sino también de la dirección y sentido en que actúan. Estas magnitudes en las que hay que distinguir su intensidad (que es una magnitud escalar), su dirección y su sentido, se llaman **magnitudes vectoriales**. Otros ejemplos son: la aceleración, la cantidad de movimiento, el campo magnético, el flujo de calor o de materia, etc.

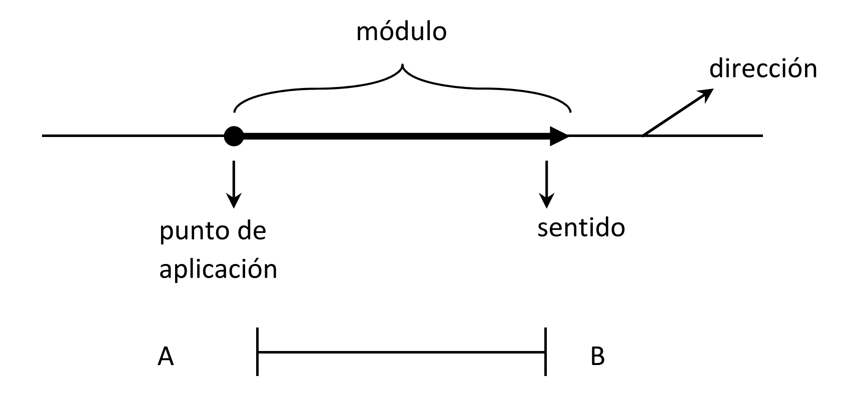
Las magnitudes vectoriales ya no se pueden representar, como los escalares, por puntos sobre una recta. Hay que tomar segmentos de una longitud (indicadora de su intensidad) a partir de un punto fijo, los cuales tengan la dirección y sentido correspondiente.

Magnitudes Escalares:



En este caso la magnitud es la longitud. Son magnitudes escalares también, el tiempo, la masa, etc.

Magnitudes Vectoriales: Son magnitudes que para ser representadas necesitan de un punto de aplicación, dirección, sentido y módulo.

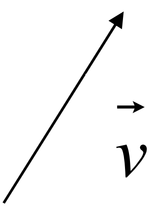


Dado un segmento como el representado, si se orienta

Se lee:

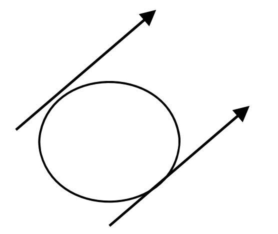
$\xrightarrow[AB]{}$: vector $\overrightarrow{AB}$ que indica principio y fin

Cuando es unívoco se puede usar una sola letra.



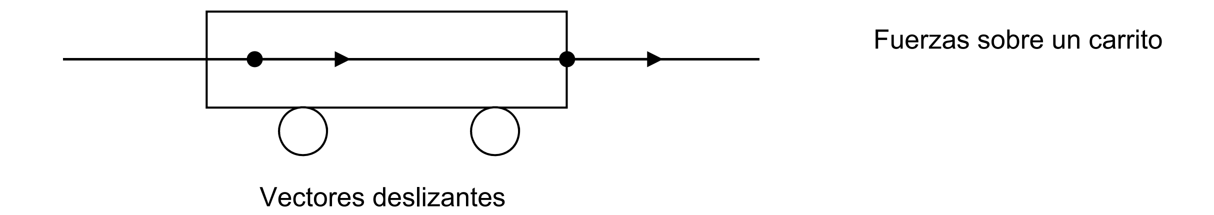
Clasificación de los vectores

Vectores fijos: El efecto de un vector puede cambiar según esté ubicado en un punto o en otro, a este tipo de vectores se los denomina fijos.



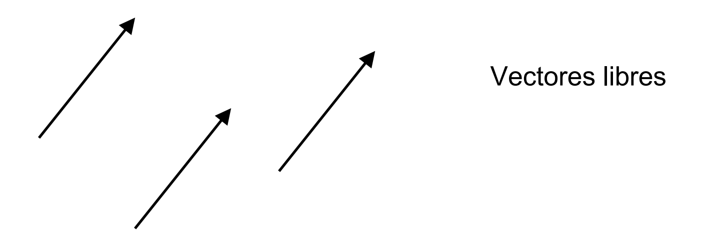
Su efecto será hacer girar en uno u otro sentido

Vectores deslizantes: Son aquellos que pueden cambiar su posición sobre su recta de acción, sin cambiar el efecto.



Vectores deslizantes

Vectores libres: Cuando un vector puede moverse paralelamente a si mismo sin cambiar su efecto, a este vector se lo denomina libre.

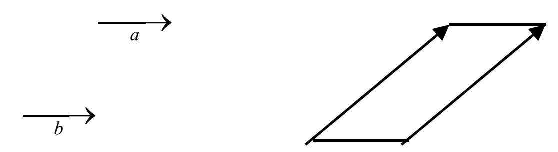


Vectores libres

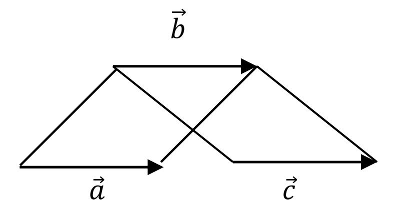
Dado un vector libre; todo vector libre que tenga el mismo efecto que él, se denominará equipolente del mismo. (los vectores anteriores son equipolentes uno de otro).

Equipolencia de vectores**:** Dos vectores son equipolentes si ocurre alguna de las siguientes situaciones:

1. Si son iguales (están superpuestos)
2. Si son nulos
3. Si forman lados opuestos de un paralelogramo igualmente orientados



4. Alineados ∃ un tercer vector equipolente con ellos.

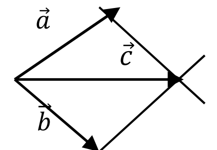


Igualdad entre magnitudes vectoriales

Dos vectores libres son iguales cuando se puede formar entre ellos un paralelogramo.

Suma geométrica de vectores

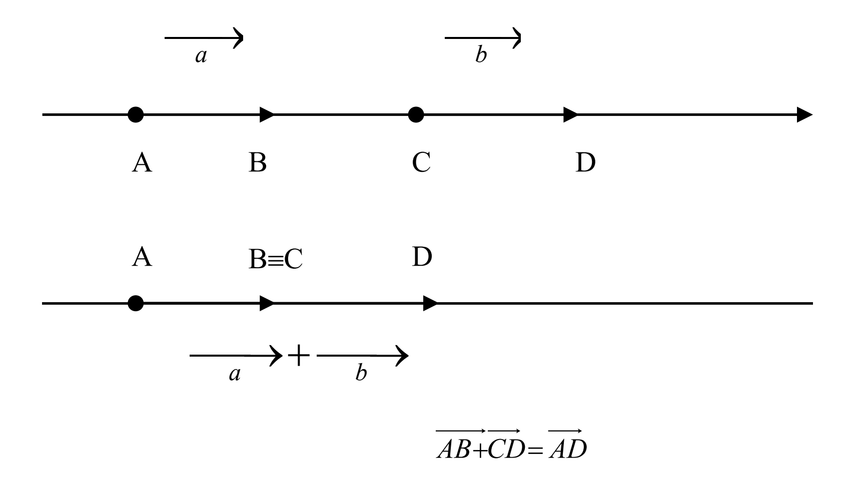
Vectores fijos:



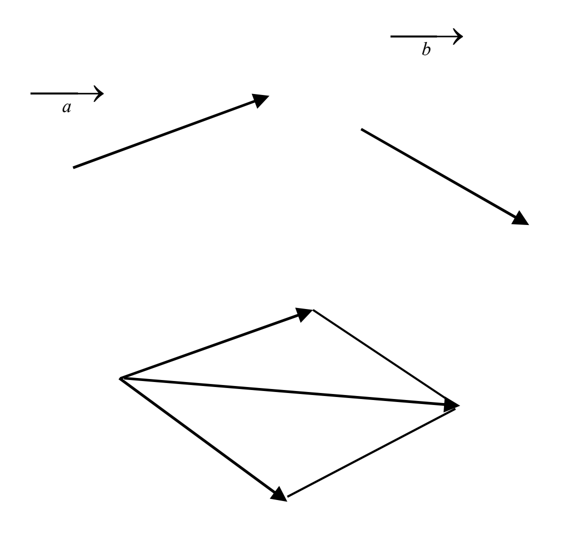
Se suman por la regla del paralelogramo

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Vectores deslizantes



Vectores libres



Para sumar se elige un punto fijo y se dibuja un vector equipolente a los sumandos con origen en el punto

Propiedades de la suma (para todo tipo de vectores)

V = conjunto de vectores

V = $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{z} ...\}$

1) La operación es cerrada: la suma de vectores da como resultado otro vector y el resultado de la suma de vectores es único. $\forall\, \vec{a}, \vec{b}\, \in V \exists \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \,/\, \vec{c} \in V \wedge \vec{c}$ es único.

2) La operación es asociativa $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \in V\, \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{d} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{d}\right)$

3) Tiene elemento neutro $\forall\, \vec{v} \in V \exists \vec{o} \in V / \vec{v} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{v} = \vec{v}$

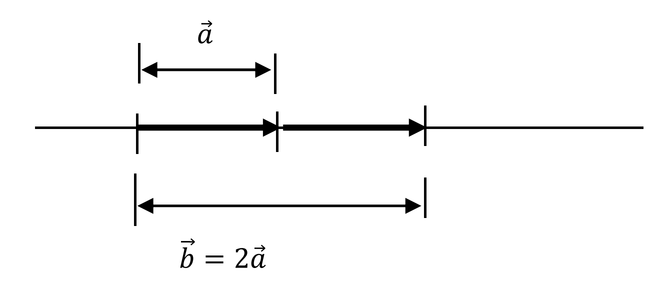
4) Tiene opuesto $\forall\, \vec{v} \in V \exists - \vec{v} \in V / \vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$

5) Es conmutativo $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V\, \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Este conjunto de propiedades conforma una estructura que se denomina grupo Abeliano, formado por una operación aplicada sobre un conjunto que cumple estas 5 propiedades.

Producto de un vector por un escalar (por un número)

Si $\vec{a}$ es un vector y λ un escalar $\neq 0$ perteneciente a los números reales, el producto entre $\vec{a}$ y λ es un nuevo vector cuyo módulo es igual al módulo del vector $\vec{a}$ multiplicado por el valor absoluto del escalar λ; cuya dirección es la que corresponde al vector $\vec{a}$ y cuyo sentido es el del vector $\vec{a}$ si λ > 0 y el contrario si λ < 0.



Propiedades del producto de un número por un vector

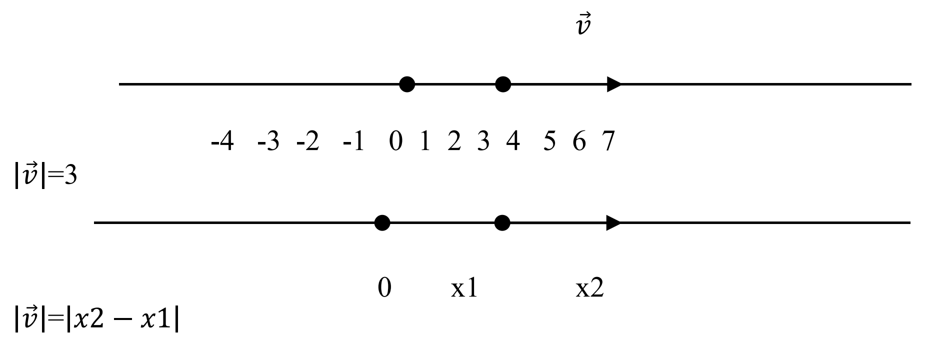
La operación no es cerrada ya que se están multiplicando elementos de conjuntos distintos (R y V)

1) $\forall\, k \in R \wedge \forall \vec{v} \in V \exists\, k \cdot \vec{v} = \vec{w} \in V \wedge \vec{w}$ es único.
2) $\forall\, k \in R \wedge \forall \vec{v}1, v\vec{2} \in V\ k(v\vec{1} + v\vec{2}) = kv\vec{1} + kv\vec{2}$
3) $\forall\, k1, k2 \in R \wedge \forall \vec{v} \in V\ (k1 + k2)\vec{v} = \vec{v}k1 + \vec{v}k2$
4) $\forall\, k1, k2 \in R \wedge \forall \vec{v} \in V\ (k1 + k2)\vec{v} = k1(k2\vec{v})$
5) $\forall \vec{v} \in V\ 1.\vec{v} = \vec{v}$

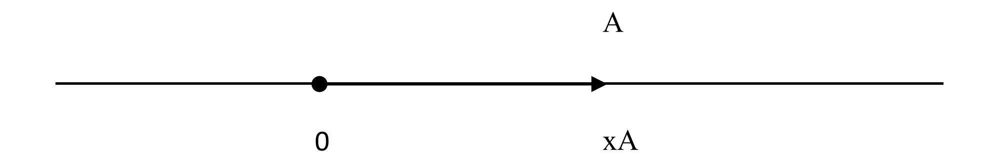
A las anteriores se las denomina propiedades lineales de los vectores.

Vectores en coordenadas

Vectores sobre una recta

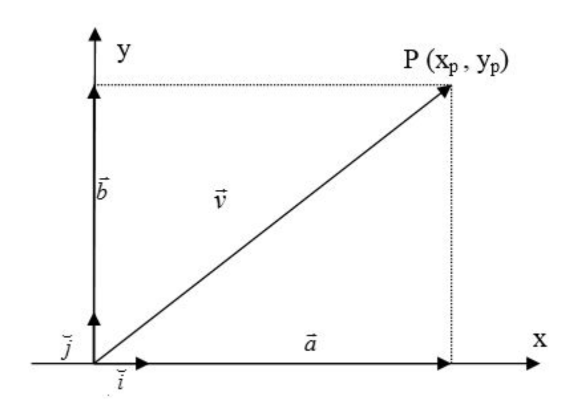


El módulo de un vector en la recta es el valor absoluto de la diferencia de las abscisas.



Vectores en el plano

Se utilizará para la representación de vectores en el plano un par de ejes normalizados (misma escala), ortogonales (perpendiculares).



$|\breve{i}| = 1$ $\breve{i}$; $\breve{j}$ son versores.

$|\breve{j}| = 1$ Los versores son vectores de módulo 1 que señalan una dirección y sentido en el espacio

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} = xp \bullet \breve{i}$

$\vec{b} = xp \bullet \breve{j}$

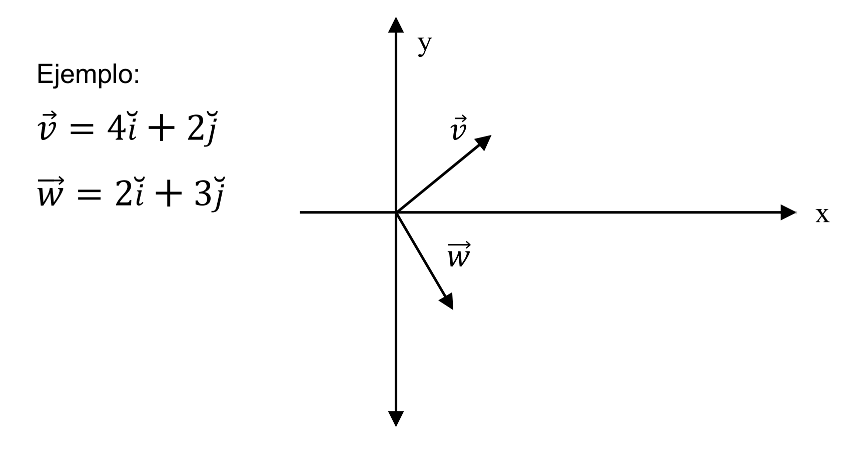
$\vec{v} = Xp\breve{i} \bullet Xp\breve{j}$

A la expresión anterior se la denomina expresión canónica de un vector.

Ejemplo:

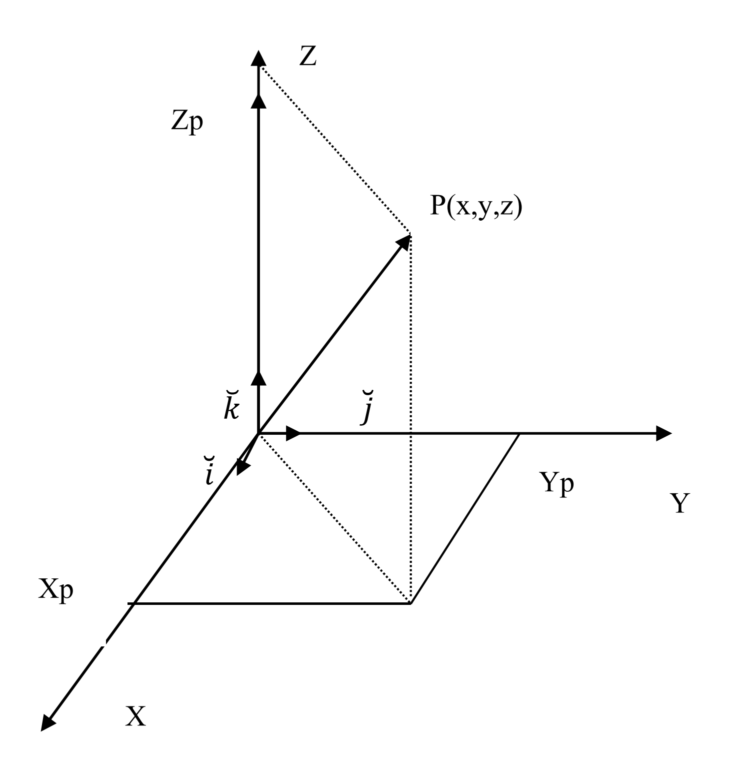
$\vec{v} = 4\breve{i} + 2\breve{j}$

$\vec{w} = 2\breve{i} + 3\breve{j}$



Para obtener el módulo de un vector en el plano: $|\vec{v}| = \sqrt{Xp^2 + Yp^2}$ por aplicación del teorema de Pitágoras

Vectores en el espacio



$|\breve{i}| = 1$

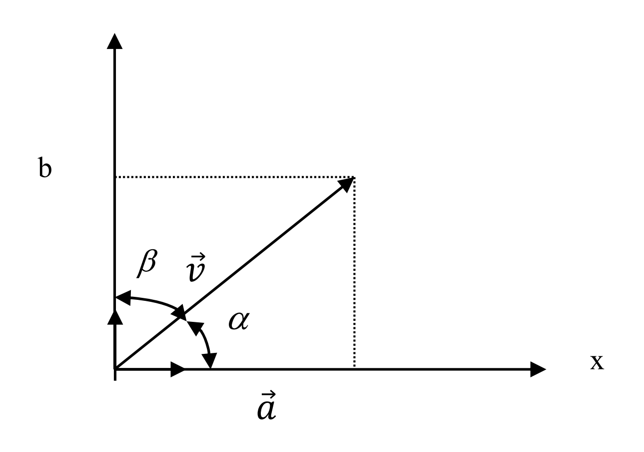
$|\breve{j}| = 1$

$|\breve{k}| = 1$

$\vec{v} = Xp\breve{i} + Xp\breve{j} + Zp\breve{k}$ su módulo se obtiene por el Teorema de Pitágoras en E_3:

$|\vec{v}| = \sqrt{Xp^2 + Yp^2 + Zp^2}$

Existe otra forma de conocer un vector:



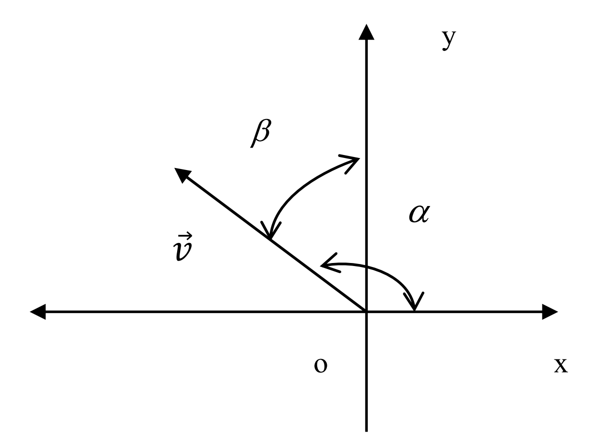
α se mide desde eje “x” positivo

β se mide desde eje “y” positivo

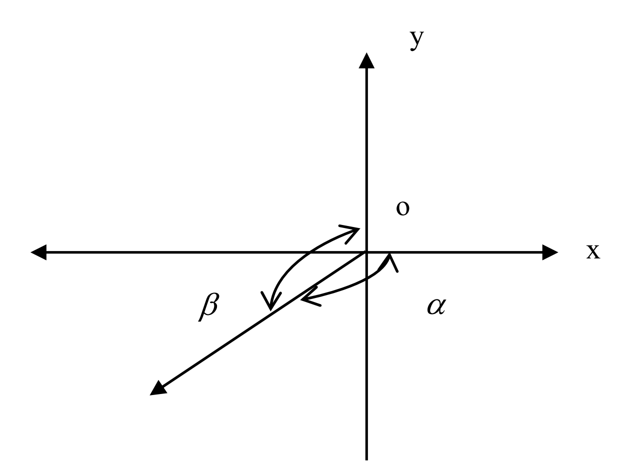
Debe observarse que los ángulos α y β son ***ángulos no orientados***.

Habiendo definido los ángulos α y β, para conocer un vector solo es necesario conocer dichos ángulos y el módulo del vector.

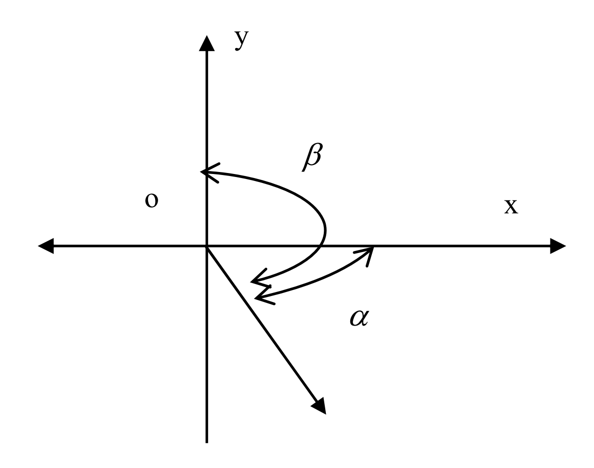
Vectores en el II Cuadrante



Vectores en el III Cuadrante



Vectores en el IV Cuadrante



Por como definimos los ángulos α y β observamos que los mismos varían entre 0º y 180 º lo que implica que los cosenos determinan un único ángulo ya que los ángulos de 0º y 180º tienen diferentes valores del coseno (los valores se repiten de 180º a 360º).

cos $\alpha = \frac{a}{\vec{v}} \Rightarrow$ a = cos α $|\vec{v}|$

cos $\beta = \frac{b}{\vec{v}} \Rightarrow$ b = cos β $|\vec{v}|$

$\vec{v} = a\breve{i} + b\breve{j} = |\vec{v}| \cos \alpha\breve{i} + |\vec{v}| cos\ \beta\breve{j}$

A los ángulos α y β se los denomina ángulos directores.

A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores.

Esto trae la ventaja que es posible representar el versor del vector $\vec{v}$ (el vector de módulo unitario que tiene la dirección y sentido del vector $\vec{v}$), de la siguiente forma:

$$\breve{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \breve{v} = \frac{|\vec{v}| \cos \alpha\breve{i} + |\vec{v}| \cos \beta\breve{j}}{|\vec{v}|}$$

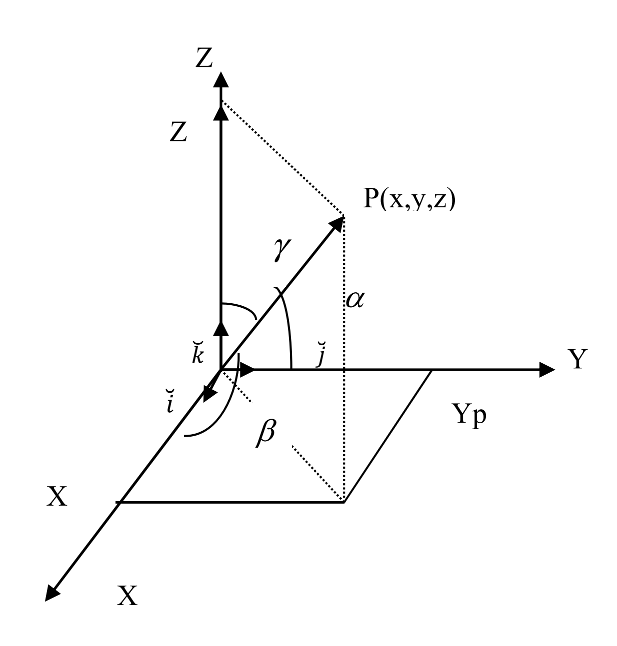
$$\breve{v} = \cos \alpha\breve{i} + \cos \beta\breve{j}$$

De lo anterior de deduce: $|\breve{v}| = \sqrt{cos^2\ \alpha + cos^2\ \beta}$

Sabiendo que el módulo de un versor es 1 entonces tenemos que:

$cos^2\ \alpha + cos^2\ \beta = 1$ y también $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ por trigonometría ∴ se deduce que: $sen^2\alpha = cos^2\beta$ podemos decir que: $|\breve{v}| = \sqrt{sen^2\alpha + cos^2\alpha} = 1$

Generalización a 3 dimensiones



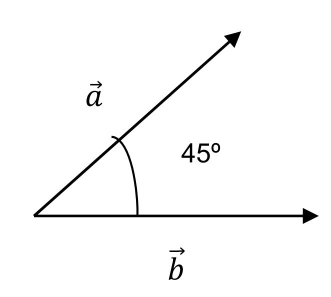
$$\breve{v} = |\vec{v}| \cos \alpha\breve{i} + |\vec{v}| \cos \beta\breve{j} + |\vec{v}| \cos \gamma\breve{k}$$

$$cos^2\ \alpha + cos^2\ \beta + cos^2\ \gamma = 1$$

Producto escalar

También puede ser encontrado como producto externo de vectores (se denomina así debido a que la operación no da como resultado un vector) o, producto punto.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \bullet cos(a\hat{b})$



Ejemplo

$|\vec{a}| = 4$

$|\vec{b}| = 7$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 19{,}79$

El producto escalar entre $\vec{a}\ y\ \vec{b}$ será 0 cuando:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow cos90° = 0$

$\vec{a}\ ,\vec{b}$ o ambos son nulos.

El vector nulo es perpendicular a cualquier otro vector.

Condición de paralelismo entre vectores

Dos vectores se considerarán paralelos cuando sus componentes resulten proporcionales:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Condición de perpendicularidad entre vectores

Dos vectores se considerarán perpendiculares cuando el producto escalar entre ellos de 0.

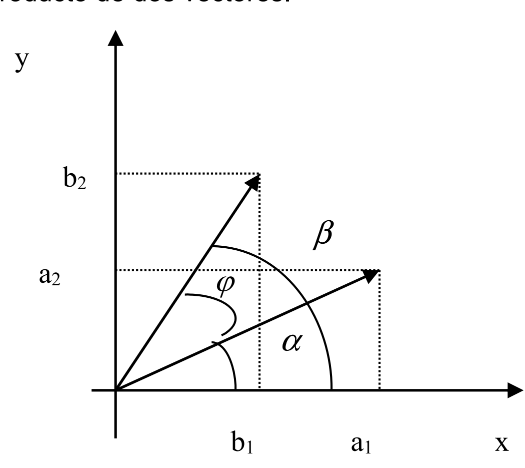
$$\vec{a}\ \cdot \vec{b} = 0$$

Si se aplican estas propiedades al producto de dos vectores.

$\vec{a} = \alpha_1 \breve{i}\ + a_2 \breve{j}$

$\vec{b} = b_1 \breve{i}\ + b_2 \breve{j}$

se obtiene:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\breve{i} + a_2\breve{j}) \cdot (b_1\breve{i} + b_2\breve{j}) = a_1b_1\breve{i}\breve{i} + \cancel{a_1b_2\breve{i}\breve{j}} + \cancel{a_2b_1\breve{j}\breve{i}} + a_2b_2\breve{j}\breve{j} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\breve{i} \cdot \breve{i} = |\breve{i}| \cdot |\breve{i}| \cdot cos0° = 1$$
$$\breve{j} \cdot \breve{j} = |\breve{j}| \cdot |\breve{j}| \cdot cos0° = 1$$

También puede postularse la definición:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ y llegar a $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$

porque $a_1 = |a| cos\ \alpha$ $\quad b_1 = |b| cos\ \beta$

$a_2 = |a| sen\ \alpha$ $\quad b_2 = |b| sen\ \beta$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = |a| cos\ \alpha \cdot |b| cos\ \beta + |a| sen\ \alpha \cdot |b| sen\ \beta$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| [cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta\ ]$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| [cos\ (\beta - \alpha) = |a||b|\ cos\ \varphi\ ]$$

Ejemplo:

$\vec{v} = 3\breve{i} + 4\breve{j}$

$\vec{v} = 8\breve{i} + 5\breve{j}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 = 24 + 20 = 44$

Esta fórmula es generalizable a 3 dimensiones.

También se puede partir al revés

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Ángulo entre vectores

Si partimos de la definición del producto escalar, despejando el coseno del ángulo:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = cos|ab| = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$cos|ab| = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$cos\ \gamma = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Esta expresión es también generalizable a 3 dimensiones donde resulta de mucha mayor utilidad, ya que el ángulo en E3 no es fácilmente dibujable.

$$|\vec{a}| \cdot |\overleftarrow{b}| cos|ab| = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$cos\,\gamma = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Actividades

1. En E_2 sean $\vec{a} = (1,-1); \vec{b} = (2,3); \vec{c} = (0,1); \vec{d} = (2,4)$ efectuar en forma gráfica y analítica las siguientes operaciones con vectores.

1.1 $\frac{1}{2}\vec{b}$ 1.2 $-2\vec{a} - 3\vec{c}$ 1.3 $\vec{a} + 2\vec{c} + 3\vec{d}$ 1.4 $2\vec{b}$ 1.5 $3\vec{c}$ 1.6 $2\vec{a} + 2\vec{b}$

2. Dados los siguientes vectores, hallar sus módulos, representar gráficamente:

2.1 $\vec{a} = -\breve{\imath} + 2\breve{\jmath}$ 2.2 $\vec{b} = \left(3; -\frac{4}{3}\right)$ 2.3 $\vec{c} = -\frac{5}{2}\breve{\imath} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\breve{\jmath}$

3. Hallar el producto escalar entre los siguientes vectores:

3.1 $\vec{a} = (2,5)$ y $\vec{b} = (-3,2)$

3.2 $\vec{c} = 2\breve{\imath} + \breve{\jmath}$ y $\vec{d} = 4\breve{\imath} - \breve{\jmath}$

3.3 $\vec{a} = (1,2,3)$ y $\vec{b} = (-2,1,5)$

3.4 $\vec{a} = 3\breve{\imath} - 2\breve{\jmath} + \breve{k}$ y $\vec{b} = -2\breve{\imath} - 2\breve{\jmath} + 2\breve{k}$

4. Hallar el ángulo que forman los vectores:

4.1 $\vec{u} = -\breve{\imath} - \breve{\jmath} + \breve{k}$ $\vec{v} = 2\breve{\imath} - 3\breve{\jmath} + \breve{k}$

4.2 $\vec{u} = \frac{1}{2}\breve{\imath} + 3\breve{\jmath}$ $\vec{v} = 4\breve{\imath} + \breve{k}$

4.3 $\vec{u} = \frac{1}{3}\breve{\imath} - 3\breve{\jmath} + 6\breve{k}$ $\vec{v} = 2\breve{\imath} + \frac{1}{9}\breve{k}$

Bibliografía

Swokowski, E., (1987). Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. México

Leithold, L., (1987). Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla. México

Grossman, S. (1987). Álgebra lineal. (2ª ed). México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Lang, S. (1986). Cálculo I. México. Fondo Educativo Interamericano.

Larson, R. (2001). Cálculo y geometría analítica. (6ª ed). México. Programas Educativos S.A.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

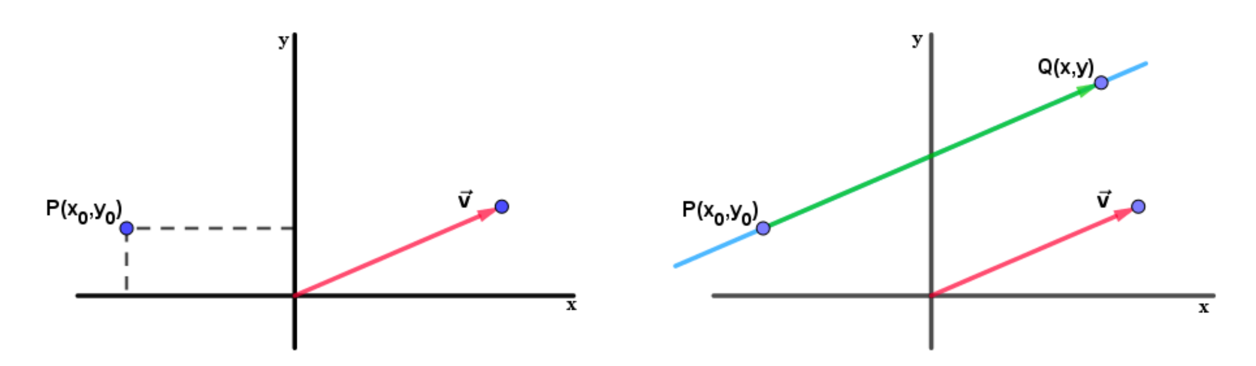
CAPÍTULO 8
Recta y Plano

Miguel Curell

Recta en el Plano

Ecuación vectorial de la recta

Una recta se puede definir si se conocen dos de sus puntos o un punto y una dirección. Construimos una recta que pase por un punto $P(x_0, y_0)$ y es paralela a un vector $\vec{v} = (a\check{\imath} + b\check{\jmath})$



Generamos un vector múltiplo a $\vec{v}$ que pase por el punto $P(x_0, y_0)$ y por un punto genérico $Q(x, y)$

$$\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\check{\imath} + (y - y_0)\check{\jmath} = \lambda\vec{v} = \lambda(a\check{\imath} + b\check{\jmath})$$

Siendo λ un número real diferente de cero.

Reescribiendo la expresión, tenemos

$$x\check{\imath} + y\check{\jmath} = x_0\check{\imath} + y_0\check{\jmath} + \lambda(a\check{\imath} + b\check{\jmath})$$

Esta ecuación se denomina ecuación vectorial de la recta.

De la ecuación anterior podemos obtener las siguientes ecuaciones que se denominan paramétricas.

$$x = x_0 + \lambda.a$$

$$y = y_0 + \lambda.b$$

Si despejamos el parámetro λ, y consideramos a y b distintos de cero tenemos la ecuación

$$\frac{(x - x_0)}{a} = \frac{(y - y_0)}{b}$$

la que se conoce como ecuación simétrica de la recta

Ecuación general de recta

De la ecuación simétrica de la recta podemos realizar las siguientes operaciones matemáticas

$$\frac{(\mathrm{x}-x_0)}{\mathrm{a}}=\frac{(\mathrm{y}-y_0)}{\mathrm{b}}\rightarrow b.(\mathrm{x}-x_0)=\mathrm{a}.(\mathrm{y}-y_0)\rightarrow b.x-a.y-b.x_0+a.y_0=0$$

Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$ podemos realizar el siguiente cambio de constantes

$$A=b\quad B=-a\quad C=-b.x_0+a.y_0$$

La ecuación que se obtiene se denomina ecuación general de la recta o ecuación implícita de la recta.

$$Ax+By+C=0$$

La que es una ecuación de primer grado.

Ecuación explícita de la recta

Despejamos la ordenada y de la ecuación implícita de la recta

$$By=Ax+C\quad\rightarrow\quad B\neq 0\quad y=\frac{Ax+C}{B}\quad\rightarrow\quad y=\frac{A}{B}x+\frac{C}{B}$$

En la que llamamos

$$m=\frac{A}{B}\qquad n=\frac{C}{B}$$

$$y=mx+n$$

La ecuación anterior se conoce como ecuación explicita de la recta o ecuación de la recta dada su pendiente y que pasa por un punto, donde:

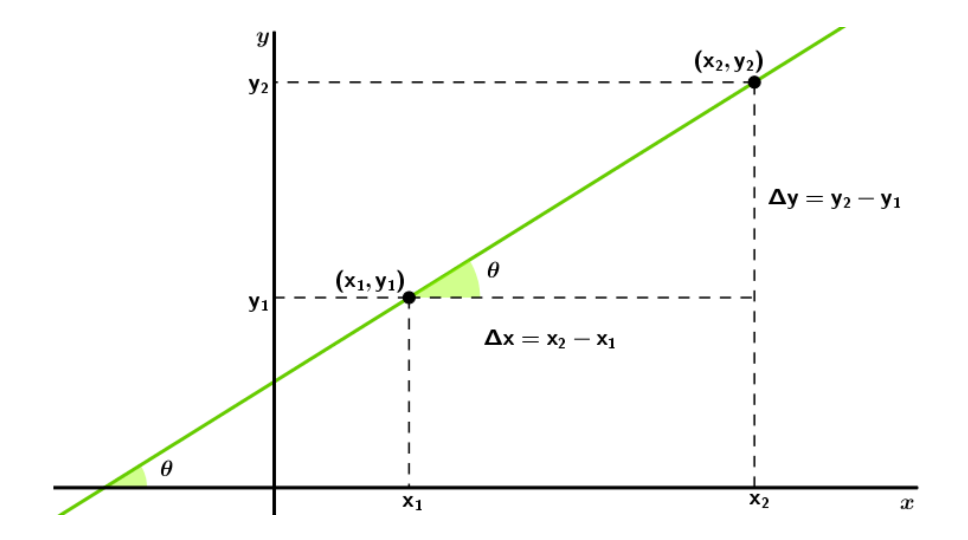
m se denomina pendiente de la recta y n ordenada al origen.

La pendiente de la recta nos indica la inclinación de la recta respecto al eje coordenado X positivo.

Si tomamos una sucesión de pares de puntos$(x_i y_j)$ pertenecientes a la recta y realizamos el cociente de la diferencia de las ordenadas por la diferencia de las abscisas de cada par de puntos, se observa que todos los cocientes son iguales:

$$m=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}=\frac{(y_3-y_2)}{(x_3-x_2)}=\cdots=\frac{(y_n-y_{n-1})}{(x_n-x_{n-1})}$$

El valor que determina el cociente se denomina pendiente de la recta.



Si construimos un triángulo rectángulo como se indica en la figura, observamos que la recta forma un ángulo θ con el eje de las abscisas, por lo que podemos deducir que la pendiente de la recta es igual a la tangente del ángulo.

$$tg(\theta) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = m \rightarrow tg(\theta) = m$$

El ángulo de inclinación θ se mide en sentido contrario a las agujas del reloj con respecto al eje positivo de x. Donde θ se define 0º ≤ θ ≤ 180º

Ecuación segmentaria o canónica de la recta

Consideremos ahora tener una recta que intercepta en dos puntos pertenecientes a cada uno de los ejes de coordenados.

De la ecuación general de la recta se pueden realizar las siguientes operaciones algebraicas.

$$Ax + By + C = 0 \quad \rightarrow \quad Ax + By = -C \quad \rightarrow \quad \frac{Ax + By}{-C} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Si definimos

$$R = -\frac{C}{A}$$

y

$$S = -\frac{C}{b}$$

la ecuación que nos queda es la ecuación segmentaria o canónica de la recta

$$\frac{x}{S} + \frac{y}{R} = 1$$

Donde S y R son las coordenadas de los puntos donde se cortan la recta con los ejes coordenados. Siendo (S,0) el punto de intersección con el eje X y (0,R) el punto de intersección con el eje Y.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente de la recta será

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Si consideremos un punto genérico de la recta (x, y), podemos decir que la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{(\mathrm{y} - y_1)}{(\mathrm{x} - x_1)}$$

De las ecuaciones anteriores deducimos que

$$\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(\mathrm{y} - y_1)}{(\mathrm{x} - x_1)}$$

A esta ecuación se la conoce como ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Ejemplo:

Queremos determinar la ecuación de una recta pasa por el punto (6,3) y es paralela al vector $\vec{\mathrm{v}} = 8\check{\imath} + 5\mathrm{y}\check{\jmath}$.

Sustituyendo en la ecuación vectorial de la recta obtenemos

$$\mathrm{x}\check{\imath} + \mathrm{y}\check{\jmath} = 6\check{\imath} + 3\check{\jmath} + \lambda(8\check{\imath} + 5\check{\jmath})$$

se deduce

$$\mathrm{x} = 6 + \lambda.8 \qquad \mathrm{y} = 3 + \lambda.5$$

las que corresponden a las ecuaciones paramétricas de la recta.

Si despejamos λ de las ecuaciones anteriores e igualamos obtenemos la ecuación simétrica de la recta

$$\lambda = \frac{(\mathrm{x} - 6)}{8} \qquad \lambda = \frac{(\mathrm{y} - 3)}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mathrm{x} - 6)}{8} = \frac{(\mathrm{y} - 3)}{5}$$

Operamos ahora algebraicamente la ecuación simétrica de la recta para obtener la ecuación implícita de la recta

$$\frac{(\mathrm{x} - 6)}{8} = \frac{(\mathrm{y} - 3)}{5} \qquad 5(\mathrm{x} - 6) = 8(\mathrm{y} - 3) \qquad 5\mathrm{x} - 30 = 8\mathrm{y} - 24 \qquad 5\mathrm{x} - 8\mathrm{y} - 30 + 24 = 0$$

$$5\mathrm{x} - 8\mathrm{y} - 6 = 0$$

despejando "y" obtenemos:

$$-8\mathrm{y} = -5\mathrm{x} + 6 \qquad \mathrm{y} = \frac{-5}{-8}\mathrm{x} - \frac{6}{-8}$$

la ecuación explicita de recta es

$$\mathrm{y} = \frac{5}{8}\mathrm{x} + \frac{3}{4}$$

La pendiente de la recta es $\mathrm{m} = \frac{5}{8}$ que nos permite determinar el ángulo que forma la recta respecto al eje de abscisas. Es decir $\mathrm{tg}(\theta) = \mathrm{m} = \frac{5}{8}$, lo que implica que el ángulo es $\theta = 32\,°$

De la ecuación explicita de la recta podemos hallar la ecuación segmentaria.

$$5x - 8y - 6 = 0 \qquad 5x - 8y = -6 \qquad \frac{5x - 8y}{6} = 1 \qquad \frac{5x}{6} + \frac{-8y}{6} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{-\frac{4}{3}} = 1$$

Los puntos $(\frac{6}{5}, 0)$ y $(0, -\frac{4}{3})$ son las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.

Ángulo entre dos rectas

Tenemos dos rectas que se cortan en un punto. Cada una de ellas tiene una determinada inclinación con respecto al eje X positivo.

De la figura podemos deducir $\theta = \theta_1 - \theta_2$, por lo tanto

$$tg(\theta) = tg(\theta_1 - \theta_2).$$

Si desarrollamos:

$$tg(\theta_1 - \theta_2) = (\frac{tg(\theta_1) - tg(\theta_2)}{1 + tg(\theta_1).tg(\theta_2)})$$

Sabemos que:

$$m_1 = tg(\theta_1)$$

$$m_2 = tg(\theta_2)$$

El ángulo entre las rectas es:

$$tg(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$$

El signo de la tangente puede ser positivo o negativo, para evitar inconveniente con el signo y obtener el menor ángulo formado entre las rectas se utilizará la ecuación en valor absoluto.

$$tg(\theta) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right|$$

De la ecuación anterior se pueden transpolar las condiciones de perpendicularidad y paralelismo entre rectas.

Si $m_1 - m_2 = 0$ implica que $m_1 = m_2$ por consiguiente $tg(\theta) = 0$, donde $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, es decir las rectas son paralelas.

Si $1 + m_1.m_2 = 0$ implica que $m_1.m_2 = -1$ por lo tanto $tg(\theta)$no está definida, entonces $\theta = 90°$ es decir que las rectas son perpendiculares.

Ejemplo

Hallar el ángulo formado entre las rectas:

$$y = -x - 3 \qquad y = 3x + 8$$

Las pendientes respectivas de cada una de las rectas son $\frac{1}{5}$ y 3

El ángulo que forman las dos rectas se puede determinar utilizando la ecuación

$$tg(\theta) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right| = \left|\frac{-1 - 3}{1 + (-1) * 3}\right| = 2$$

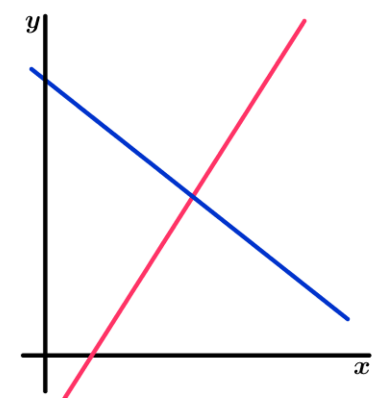
El ángulo será $63{,}43°$

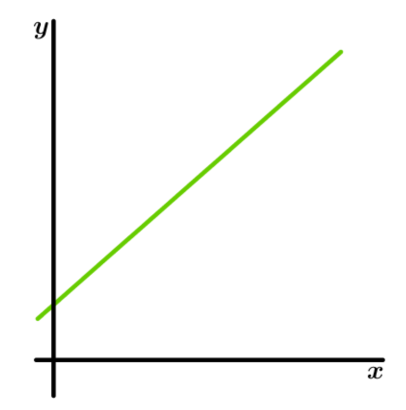
Intersección entre rectas

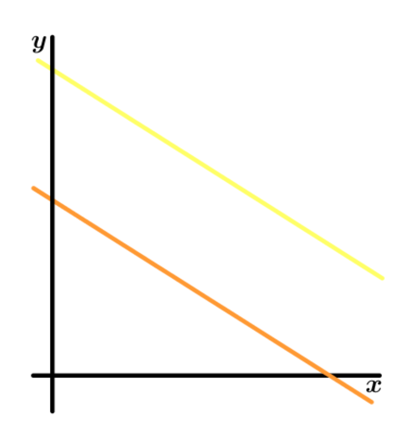
Como se vio anteriormente la ecuación de la recta es una ecuación de primer grado en dos variables x, y

Sean las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$

Resolviendo este sistema de ecuaciones por algún método de resolución, se pueden obtener tres resultados diferentes: a) una solución es decir, las rectas se interceptan en un punto, b) infinitas soluciones, lo que significa que las rectas se encuentran superpuestas, c) no tiene solución, esto nos indica que las rectas son paralelas.







Ejemplo

Dada las rectas hallar su intersección, si es posible: $2.5x + y = -3 \qquad 3x + y = 8$

Despejamos las variables "y" de ambas ecuaciones e igualamos

$$y = -2.5x - 3 \qquad y = -3x + 8$$

$$-2.5x - 3 = -3x + 8 \qquad 0.5x = 11 \qquad x = 22$$

Sustituyendo el valor de x en cualquiera de las ecuaciones de las rectas obtenemos el valor de y

$$y = -2.5(22) - 3 = -58$$

Este resultando nos indica que las rectas se intersectan en el punto (22,-58)

Actividades

1. Escribir la ecuación vectorial, paramétrica, simétrica, explicita, implícita y segmentaria de la recta y representarla gráficamente:

1.1 El punto (-2,3) pertenece a la recta y ésta es paralela al vector $\vec{v} = -3\check{\imath} + 2\check{\jmath}$.

1.2 La recta pasa por los puntos (-6,3) y (4,3).

1.3 Los puntos $P_1(3.5,0)$, $P_2(6,5)$, P_3(2,-3) pertenecen a la recta.

1.4 La recta es perpendicular al vector $\vec{v} = 8\check{\imath} + 5\check{\jmath}$ y pasa por el origen.

1.5 La recta posee una pendiente ¾ y ordenada al origen.

2. Calcular la distancia de la recta $-x - 2y = 12$ y el punto (-2,3)

3. Indicar cuáles de las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares

$y = 4x - 5$, $\quad x - 4y = 12$, $\quad \frac{1}{3}x + y - 4 = 0$, $\quad y = -0.25x - 5$

4. Hallar el ángulo formado entre las rectas

4.1 $y = 4.11/5x - 4$ y $y = 8/3x + 5$

4.2 $y = -5/6x + 2$ y $y = 2x + 3$

5. Hallar el punto de intersección, si es posible, entre las rectas

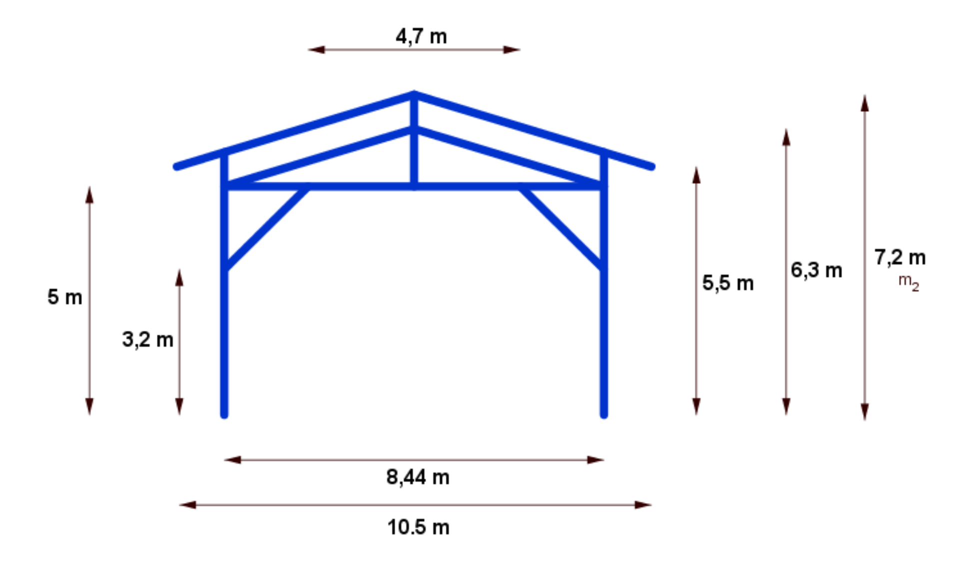
5.1 $3x + 13y = 10$ y $8x - 4y = 56$

5.2 $-2x + 5y = 2$ y $x - \frac{5}{2}y = 19$

6. Obtener la ecuación de la recta de pendiente 1/3 y pasa por el punto de intersección de las rectas del ejercicio anterior-

7. Se construye una escalera de 25 escalones, de 18 cm de alzada y 30 cm de pedada. Hallar la ecuación de la recta que modeliza la escalera desde la parte inferior de la alzada del primer escalón hasta la parte superior de la escalera. ¿Cuál es la pendiente de la escalera? ¿Cuál es el ángulo de la escalera con respecto al suelo?

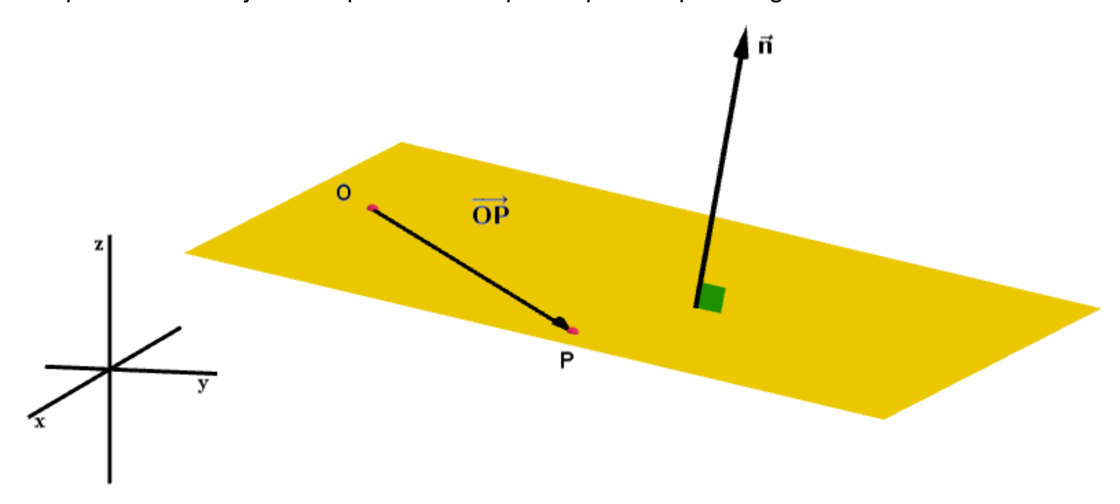
8. Hallar las pendientes de los listones inclinados de la siguiente pérgola y establecer, si es ser posible, las ecuaciones de la recta que determinan.



Plano

Ecuación del plano

El plano es el conjunto de puntos del espacio que cumple la siguiente condición $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}.\vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$



Siendo $\vec{\boldsymbol{n}} = \left(a\check{\imath} + b\check{\jmath} + c\check{k}\right)$ el vector perpendicular al plano y

$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = (x - x_0)\check{\imath} + (y - y_0)\check{\jmath} + (z - z_0)\check{k}$ un vector generado entre dos puntos del mismo plano.

Desarrollando la ecuación $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}.\vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$

Obtenemos

$$(x - x_0)\check{\imath} + (y - y_0)\check{\jmath} + (z - z_0)\check{k}.\left(a\check{\imath} + b\check{\jmath} + c\check{k}\right) = 0$$

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

La ecuación que deducimos es la ecuación cartesiana del plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

Aplicando operaciones algebraicas a la ecuación anterior tenemos la siguiente expresión. $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ que se llama ecuación segmentaria del plano

Ejemplo

Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $(6, -6, 3)$ y es perpendicular al vector $(2\check{\imath} + 3\check{\jmath} + 6\check{k})$.

La ecuación del plano es $ax + by + cz + d = 0$ en la que a, b, y c son las componentes del vector normal. Si realizamos la sustitución de las componentes del vector normal al plano, la ecuación queda de la forma

$$2x + 3y + 6z + d = 0$$

Para determinar el valor d, se debe utilizar el punto por el cual pasa el plano.

$$2 * 6 + 3 * (-6) + 3 * 6 + d = 0 \qquad d = 12$$

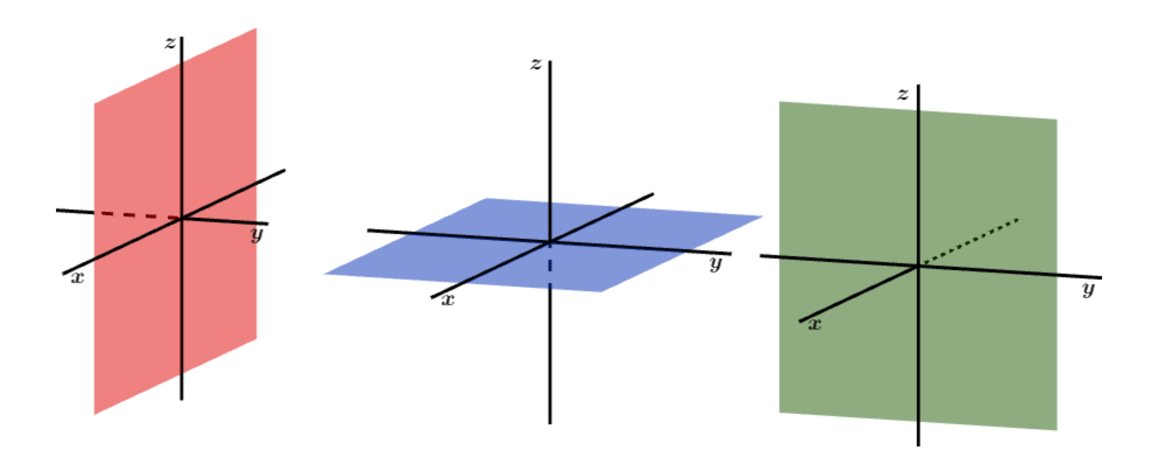
Entonces la ecuación del plano es

$$2x + 3y + 6z + 12 = 0$$

Representación de Planos

Planos coordenados

Se llaman planos coordenados a los planos generado por cada par de ejes coordenados. Las figuras indican el plano de coordenados xz, xy e yz.



Los planos coordenados xy, xz e yz tienen respectivamente las siguientes ecuaciones $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$

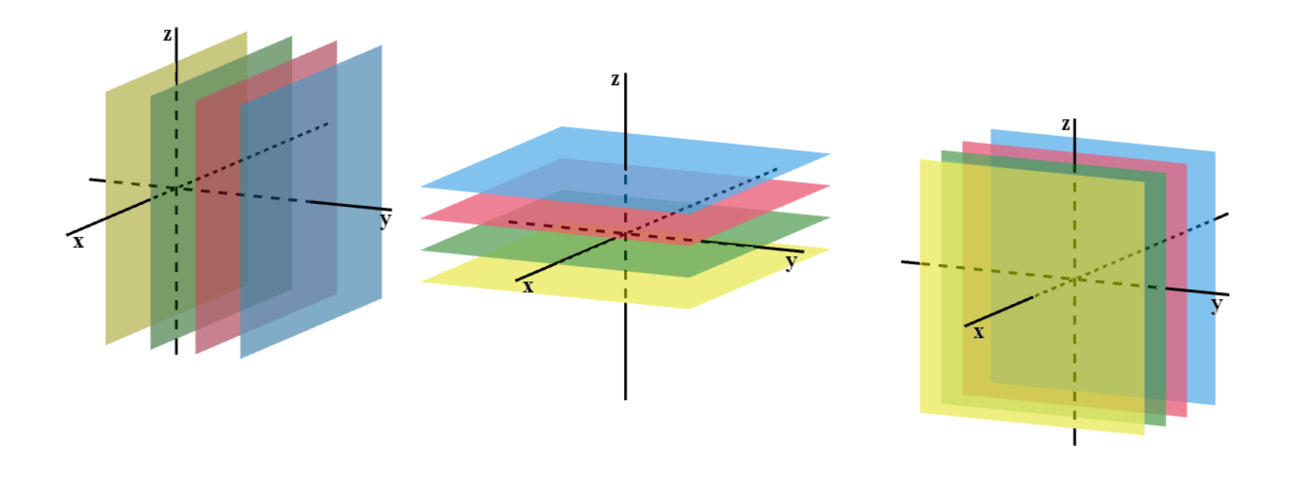
Planos paralelos a los planos de coordenados

Cuando la ecuación del plano $ax + by + cz + d = 0$ tiene nulas dos de las componentes del vector normal del plano entonces el plano que resulta es paralelo a algunos de los planos coordenados.

Plano paralelo al plano xz le corresponde la ecuación del plano $by + d = 0$.

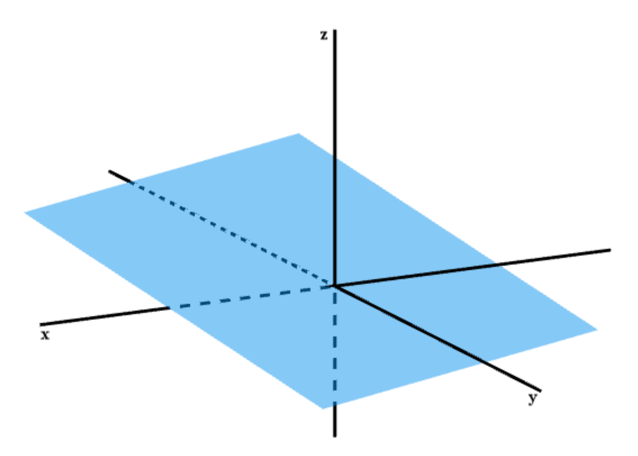
Plano paralelo al plano xy le pertenece la ecuación del plano $cz + d = 0$.

Plano paralelo al plano yz le concierne la ecuación del plano $ax + d = 0$.



Plano que pasa por el origen

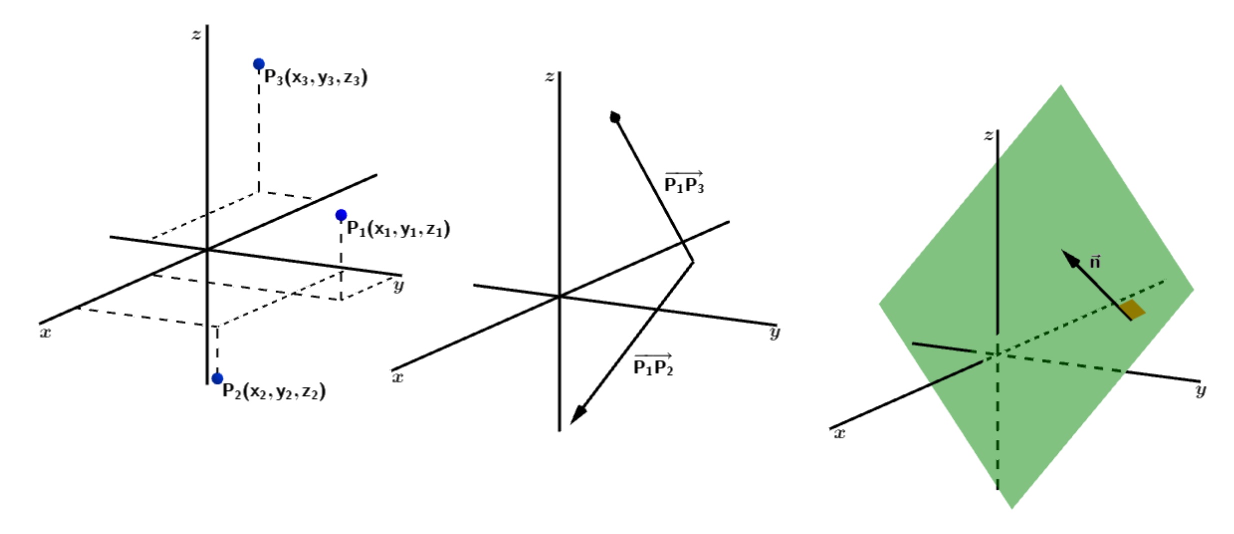
Sea el plano $ax + by + cz + d = 0$ si pasa por el origen $d = 0$ entonces la ecuación del plano será de la forma $ax + by + cz = 0$.



Plano que pasa por tres puntos

Dados tres puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$ no alineados, podemos generar dos vectores, por ejemplo, $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ y a partir de ellos por medio del producto vectorial obtener el vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ al plano.

La ecuación del plano es: $ax + by + cz + d = 0$ el valor d se determina sustituyendo las coordenadas de cualquier de los tres puntos dados.

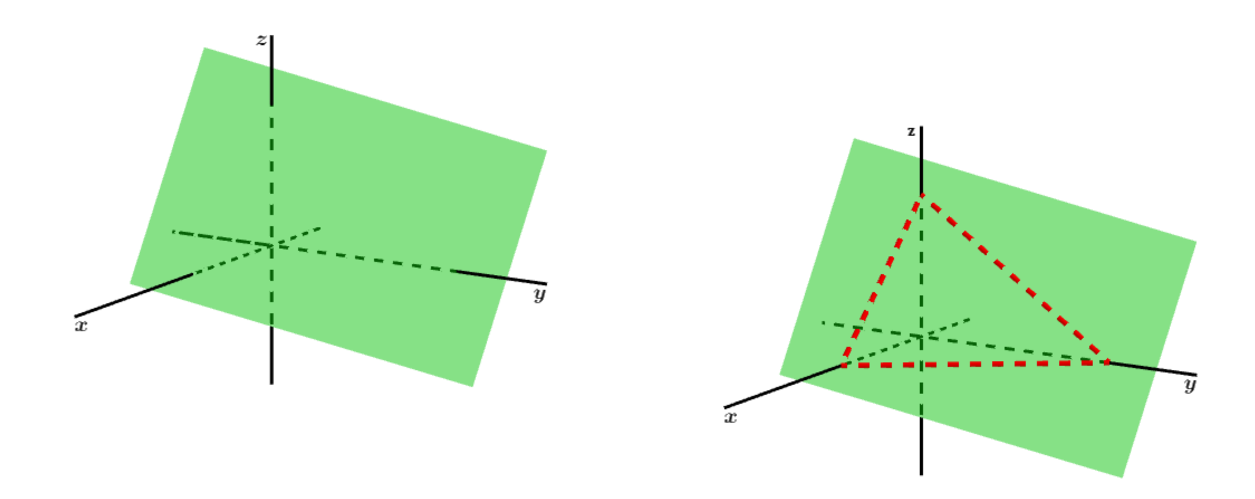


Trazas de un plano

Se denominan trazas de un plano a la intersecciónn de plano con los planos coordenados.

Por ejemplo un plano $ax + by + cz + d = 0$ que intersecta a los tres planos coordenados, las ecuaciones de sus trazas son:

$ax + by + d = 0$, $ax + cz + d = 0$ y $by + cz + d$=0



Posiciones particulares del plano

Sea la ecuación general del plano $Ax + By + Cz + D = 0$. Estudiamos las posiciones particulares que el plano adopta según que se anulen uno o más coeficientes de su ecuación:

a) Si $D = 0$ la ecuación se transforma en $Ax + By + Cz = 0$ y se satisface para el origen de coordenadas; resulta entonces ser la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas.

b) Si cualquiera de los coeficientes de las variables es nulo, por ejemplo $C = 0$, obtenemos $Ax + By + D = 0$ resultando el vector normal $\vec{n} = (A, B, 0)$, es decir, con componentes solo en el plano xy; se concluye que siendo $\vec{n}$ normal al eje z, el plano deberá ser paralelo a dicho eje.

c) Sean ahora $C = B = 0$; la ecuación del plano resulta $Ax + D = 0$ en la $\vec{n} = (A, 0,0)$ es paralelo al eje x y el plano se ubica paralelo al plano yz.

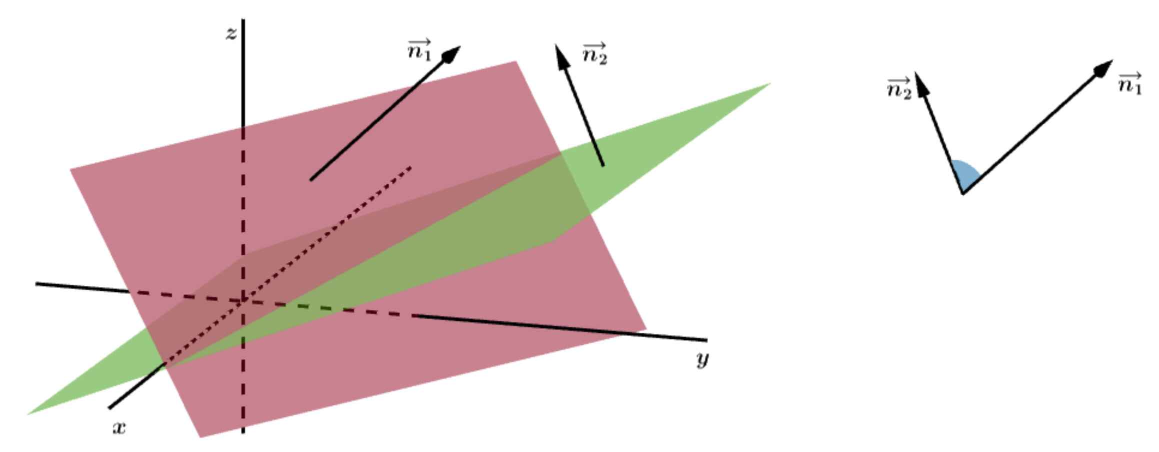
d) Si $C = B = D = 0$ queda $Ax = 0$ o bien $x = 0$ ecuación del plano yz.

Ángulo entre planos

Se tienen dos planos $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, para determinar el ángulo θ entre ellos, se calcula el ángulo entre los vectores normales a cada plano.

$$\cos(\theta) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2}.\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2}.}$$

Si θ toma el valor cero significa que los planos son paralelos. Si en cambio toma el valor uno o menos uno significa que los planos son perpendiculares



CONDICIÓN DE PARALELISMO:

Si los planos son paralelos, sus vectores normales también lo serán; en consecuencia la condición de paralelismo entre planos resulta de la condición de paralelismo entre vectores.

Algebraicamente podemos decir

$$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \qquad a_1\check{i} + b_1\check{j} + c_1\check{k} = k(a_2\check{i} + b_2\check{j} + c_2\check{k})$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Esta última ecuación representa la condición de paralelismos planos

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:

Si los planos son perpendiculares, ϕ = 90º ⇒ cos ϕ = cos 90º = 0, resultando igual a cero el numerador de la expresión (1).

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 = \vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2$$

la condición de perpendicularidad, puede expresarse como **producto escalar nulo.**

Actividades

1. Hallar la ecuación del plano:
   1.1 Si el punto (1,-4,2) pertenece al plano y el vector $3\breve{\imath} + 5\breve{\jmath} - 7\breve{k}$ es perpendicular al plano
   1.2 El plano pasa por el punto (5, 2.4) y es paralelo al plano $2x + 3y + 5z = 36$.
   1.3 Perpendicular al plano coordenado yz y el punto (1,2,4) le pertenece.
   1.4 El plano es perpendicular al plano $3x - 5y - z = 0$ y pasa por el origen de coordenada.
   1.5 Los puntos (2,5,-1), (-3,5,4) y (-1,3,0) pertenecen al plano.

2. Hallar el ángulo entre los siguientes planos

$$6(x-1) + 5(y+4) - 7(z-2) = 0$$
$$-1x - 6y - 3z + 1 = 0$$

3. Dado el plano $3x + 2y + 4z = 12$ determinar la intersección con los ejes de coordenadas y las trazas.

4. Escribir la ecuación segmentaria del plano $5\,(x + 1) - 2(y + 4) + z = 0$ y analizar las intersecciones con los ejes y planos coordenados.

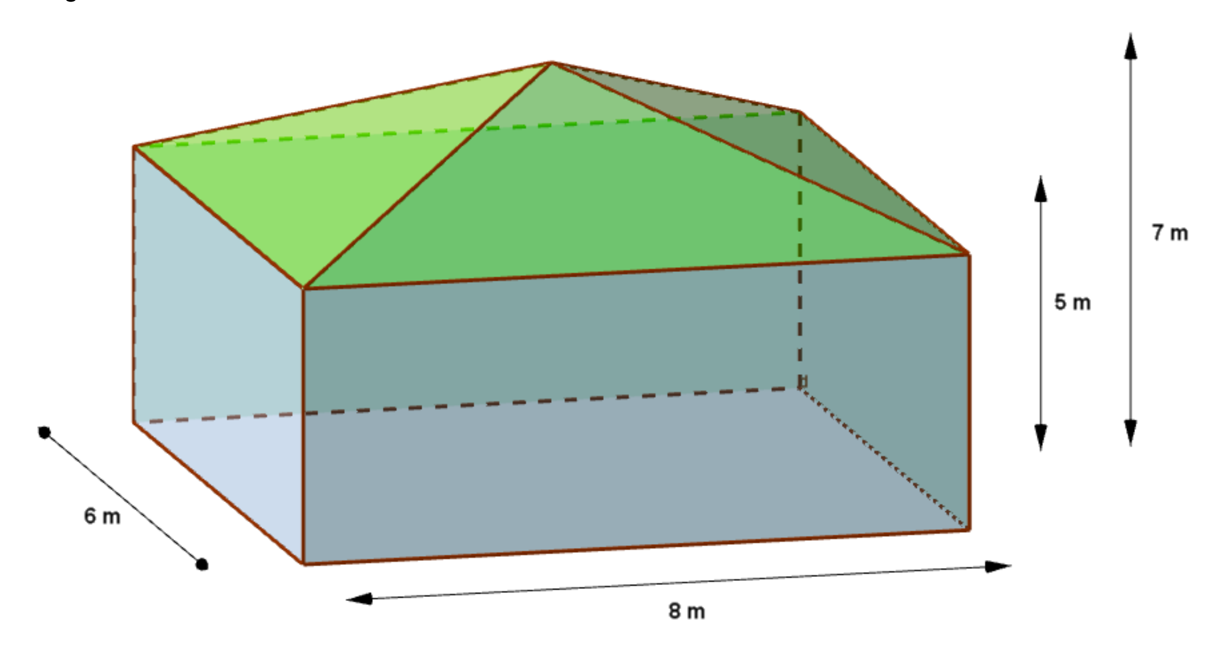
5. Indicar cuales de los siguientes planos son paralelos o perpendiculares

$$-x - 3y + 8z = 2,$$
$$2(x-1) + 6(y+4) - 16(z-2) = 0$$
$$2(x-1) + 2(y+4) - 1(z-2) = 0$$

6. Determinar el ángulo entre los siguientes planos

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 3y - 6z = -4$$

7. Determinar las ecuaciones de los planos que corresponden a la siguiente estructura de un refugio.



Bibliografía

FULLER G, TARWATER D, (1995) Geometría Analítica, Pearson Educación.
GROSSMAN S, (2012) Álgebra lineal. MC Graw Hill.
LEHMAN C. (1989) Geometría Analítica. Limusa.

CAPÍTULO 9
Cónicas y Cuádricas

Carlos Chong

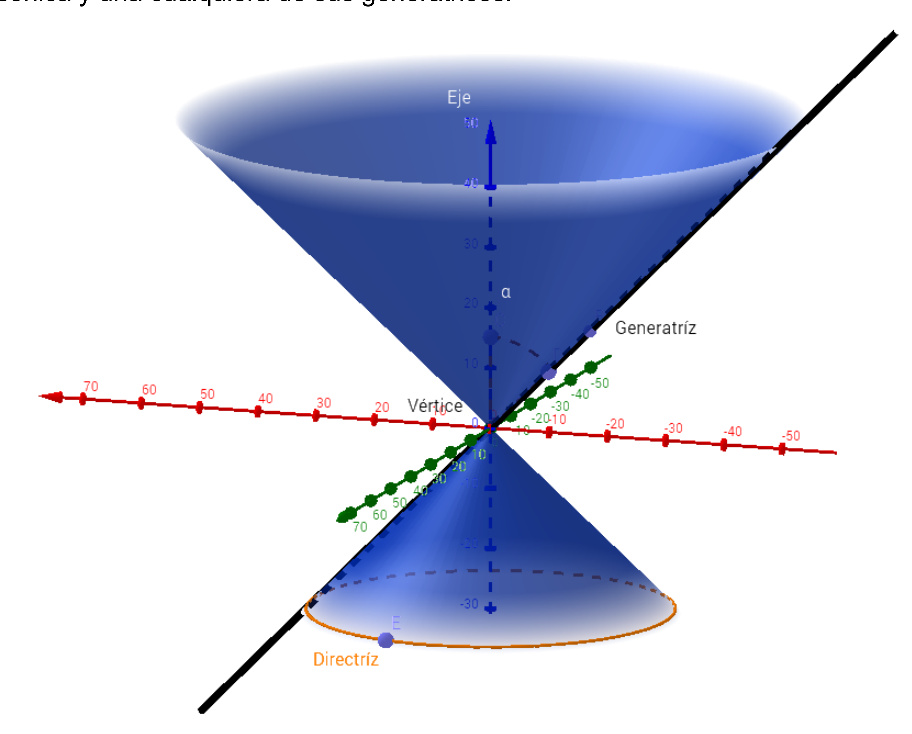
Superficie Cónica

Se denominan cónicas a las líneas planas que se obtienen intersectando bajo distintos ángulos, una superficie cónica con un plano.

La superficie cónica se obtiene haciendo rotar una recta denominada generatriz alrededor de un punto fijo llamado vértice, manteniendo otro punto constantemente sobre una circunferencia llamada directriz, situada en un plano perpendicular al eje y condicionada a que su centro esté sobre el eje.

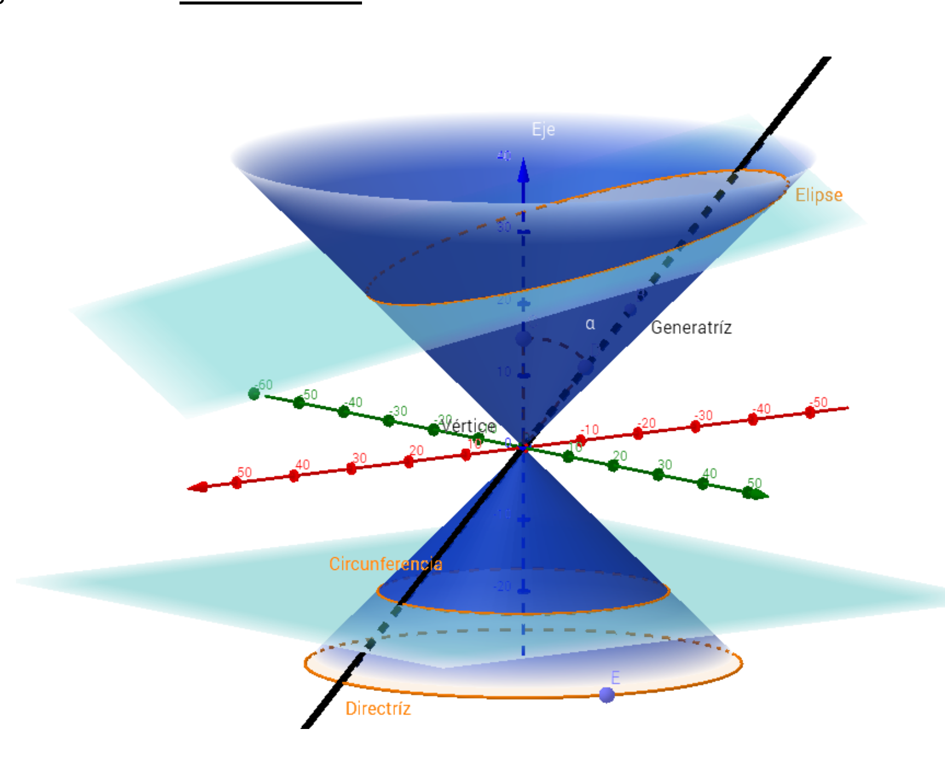
Los diferentes tipos de cónica se generan cortando la superficie cónica bajo distintos ángulos.

Se presentan tres casos según que el ángulo de corte sea menor, igual o mayor que el ángulo de abertura de la superficie cónica. Definimos como tal al ángulo (α) entre el eje de la superficie cónica y una cualquiera de sus generatrices.



Si se corta una superficie cónica con un plano bajo un ángulo mayor que el de abertura, el plano corta una sola de las ramas de la superficie cónica y se obtiene una curva cerrada denominada **elipse**. Se presentan dos casos particulares:

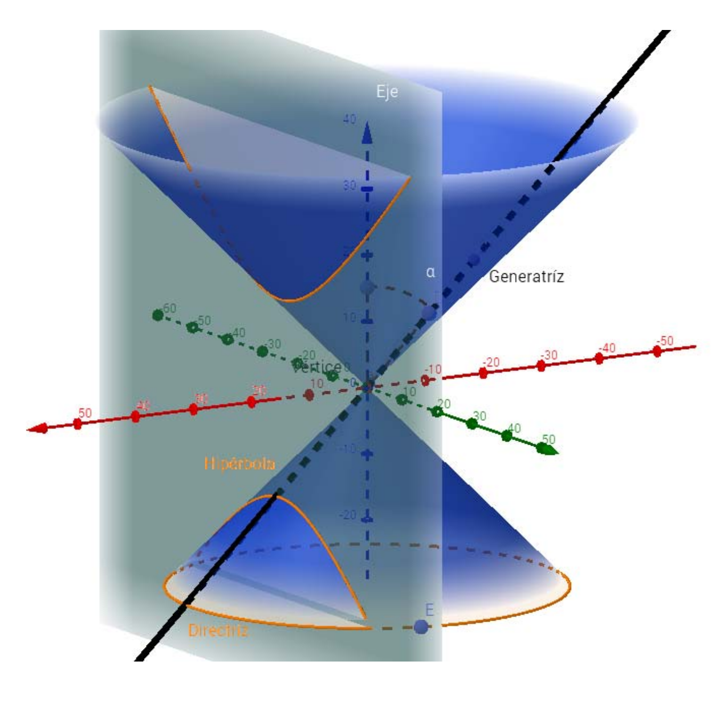
a) cuando el plano de corte es perpendicular al eje de la superficie cónica la intersección "degenera" en una **circunferencia**.



Circunferencia - Elipse

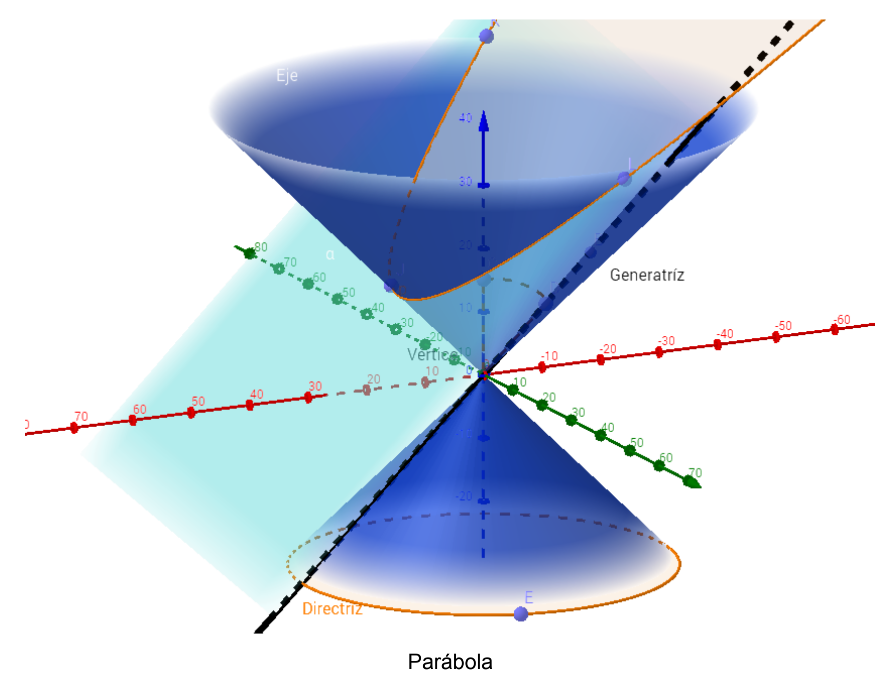
b) si se traslada el plano de corte paralelamente a sí mismo hasta que contenga el vértice, la elipse o la circunferencia, según sea el caso, "degenera" en un punto: el vértice de la superficie cónica.

Si el plano de corte tiene con respecto al eje un ángulo menor que el de abertura, cortará las dos ramas de la superficie cónica, obteniéndose una curva que recibe el nombre de hipérbola. Como caso particular, cuando el plano se mueve paralelamente a sí mismo hasta contener al vértice, la hipérbola "degenera" en un par de rectas ***(observar el corte de la superficie cónica con el plano del dibujo)***.



Hipérbola

Si por último, el plano de corte es paralelo a la generatriz, cortará una sola de las ramas de la superficie cónica y se obtendrá como curva intersección una **parábola**. En este caso, cuando el plano de corte se desplaza paralelamente a sí mismo hasta contener al vértice, la parábola "degenera" en una recta coincidente con una cualquiera de las generatrices de la superficie cónica.



Parábola

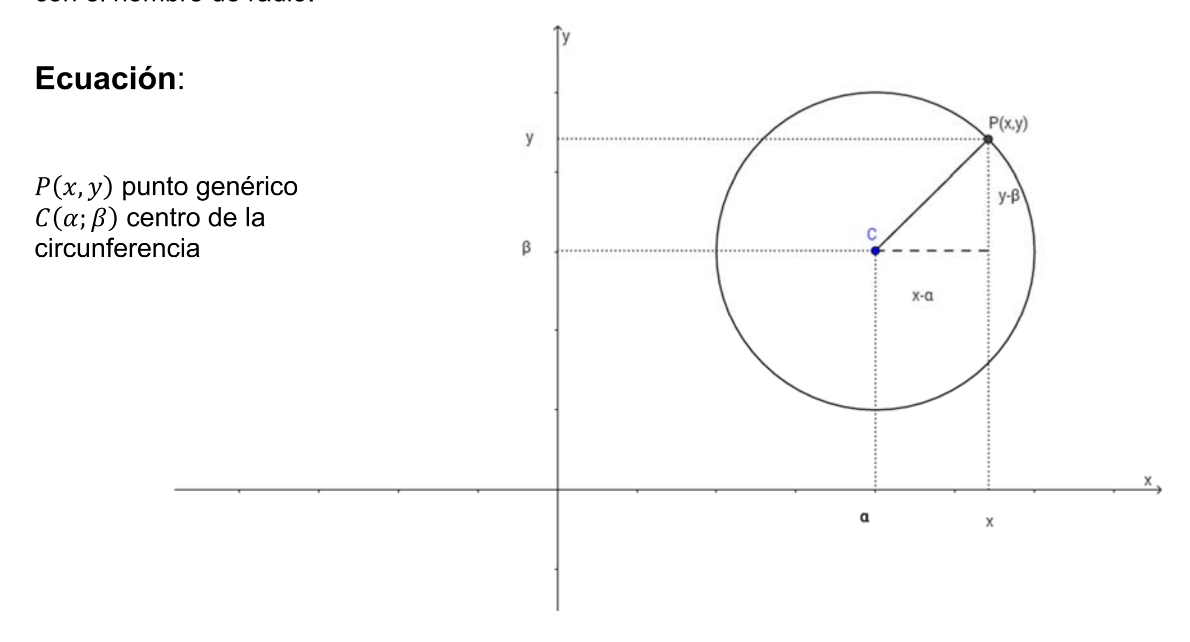
Los nombres **elipse**, **hipérbola** y **parábola** de deben al geómetra **Apolonio**, de la escuela de Alejandría, que hacia el año 225 AC., escribió un tratado sobre la secciones cónicas en ocho libros, siete de los cuales han llegado a nosotros.

Circunferencia

Definición: Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Dado un punto $C(\alpha;\beta)$ que llamamos **centro** y un valor $r > 0$ que designamos con el nombre de radio.

Ecuación:

$P(x,y)$ punto genérico
$C(\alpha;\beta)$ centro de la circunferencia



Considerando la fórmula de distancia entre dos puntos, calculamos el valor del radio:

$$CP = r = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$ **Ecuación canónica de la circunferencia de centro $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ y radio r.**

Desarrollando los cuadrados y ordenando:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$ obtenemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$ **que es la ecuación General de la circunferencia**

De las igualdades anteriores obtenemos:

Coordenadas del centro: $\alpha = -\frac{D}{2}; \quad \beta = -\frac{E}{2}$

y radio: $r = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - F)}$

Analicemos el valor del radio:

Si: $$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2-F>0 \quad \Rightarrow \quad La\ Circunferencia\ \ es\ \ real \\ \alpha^2+\beta^2-F=0 \Rightarrow La\ circunferencia\ se\ reduce\ a\ un\ punto \\ \alpha^2+\beta^2-F<0 \quad \Rightarrow \quad Circunferencia\ de\ imaginario \end{cases}$$

La ecuación general de la circunferencia es un caso particular de la ecuación general de segundo grado en dos variables, cuya forma es:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Comparando esta ecuación con la ecuación general de la circunferencia, observamos que en ésta última los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y además falta el término en **xy**.

Resulta entonces que una ecuación tendrá como lugar geométrico una circunferencia si responde a la ecuación general de segundo grado en dos variables, con los coeficientes A y C iguales, con el término Bxy (llamado término rectangular) faltante y que verifique:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 - F > 0}$$

Ejemplos:

1.- Dada la ecuación:

$$x^2+y^2-6x-8y+16=0;$$

Determinar:

a) Las coordenadas del centro.

b) El valor del radio.

c) La ecuación cartesiana.

d) Efectuar la representación gráfica.

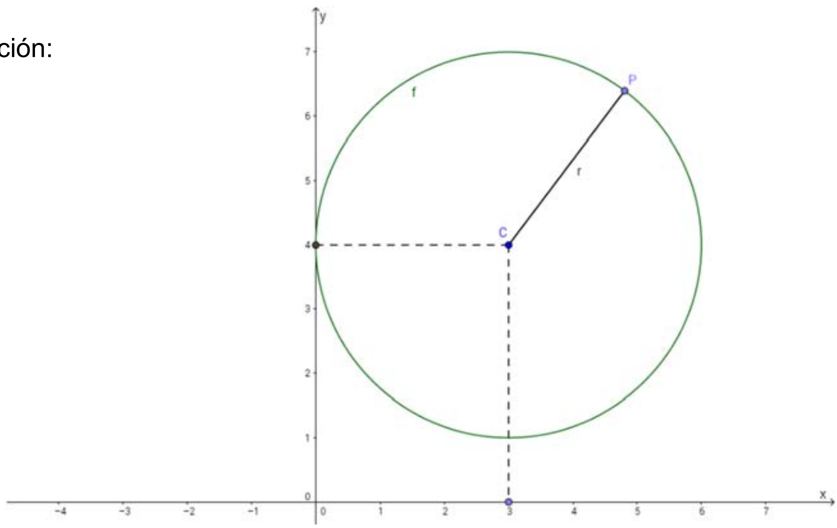
$$(\alpha;\beta)=\begin{cases}\alpha=-\frac{D}{2}\\ \beta=-\frac{E}{2}\end{cases} \Rightarrow (\alpha;\beta)=\begin{cases}\alpha=-\left(-\frac{6}{2}\right)=3\\ \beta=-\left(-\frac{8}{2}\right)=4\end{cases} \Rightarrow C(3;4)$$

$$r=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-F)} \Rightarrow r=\sqrt{(3^2+4^2-16)}=3$$
$$r=3$$

Ecuación cartesiana:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=3^2$$

Representación:



2.- Sabiendo que el centro de una circunferencia es $C(-2;5)$y su radio r = 3, escribir su ecuación general:

Ecuación canónica:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\beta})^2=\boldsymbol{r}^2 \Rightarrow (\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{5})^2=\mathbf{3}^2 \Rightarrow$$

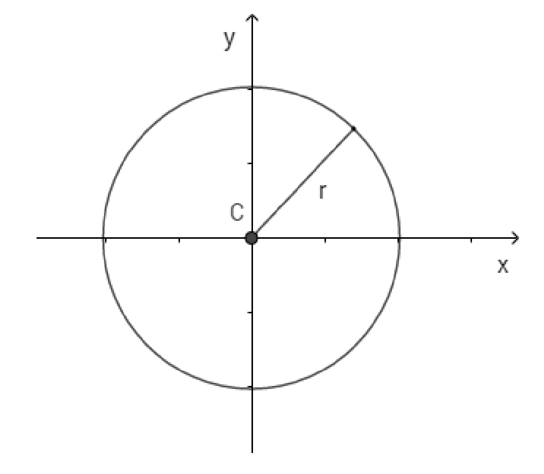
$$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{10}\boldsymbol{y}+\mathbf{20}=\mathbf{0} \quad \boldsymbol{Ecuación\ General}$$

Posiciones particulares

La ecuación: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ de la circunferencia se simplifica para posiciones particulares.

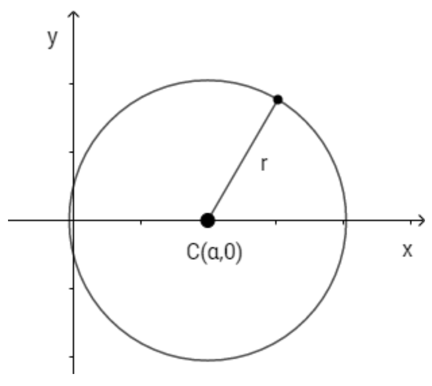
1.- Si el centro está en el origen de coordenadas:

$C(0;0) \Rightarrow x^2+y^2=r^2$



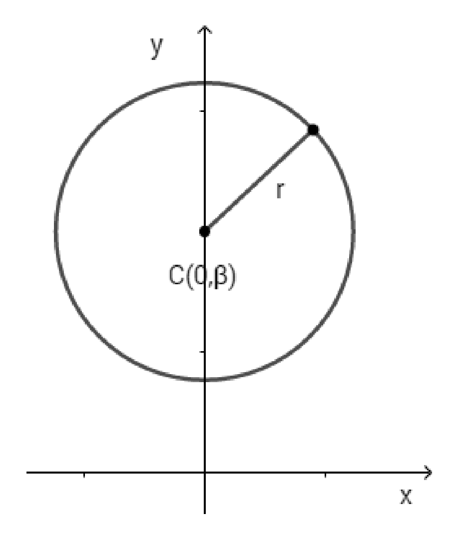
2.- Si el centro está sobre el eje de las abscisas, $\beta=0$:

$C(\alpha;0) \Rightarrow (x^2-\alpha^2)+y^2=r^2$



3.- Si el centro está sobre el eje de las ordenadas, $\alpha = 0$:

$$C(0;\beta) \Rightarrow x^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$



Intersecciones

Intersección de una circunferencia y una recta

Si dos líneas coplanares tienen un punto en común, las coordenadas de este punto deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones de ambas líneas. En consecuencia, el problema de hallar las coordenadas de los puntos de intersección de dos líneas se resuelve, encontrando la solución del sistema determinado por sus ecuaciones.

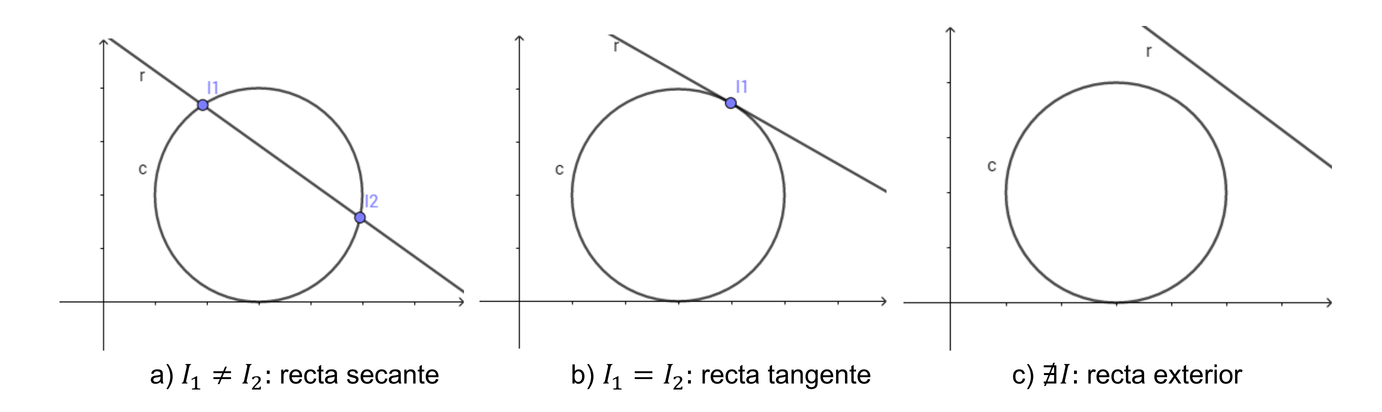
Escribimos el sistema formado por ambas ecuaciones, y luego sustituimos en la ecuación de la circunferencia el valor de una de las variables que despejamos en la ecuación de la recta, obteniendo una ecuación de 2º grado en una sola variable que resolvemos.

La solución de esta ecuación da dos valores x_1 y x_2. Pueden presentarse los siguientes casos:

a) $x_1 \neq x_2$: $x_1 \in R \wedge x_2 \in R \Rightarrow$ recta secante a la circunferencia; 2 puntos de intersección.

b) $x_1 = x_2$: $x_1 = x_2 \in R \Rightarrow$ recta tangente a la circunferencia; 1 punto de intersección.

c) $x_2 \in C \wedge x_1 \in C \Rightarrow$ recta exterior a la circunferencia; no hay puntos de intersección. *(C = conjunto de los números complejos)*



a) $I_1 \neq I_2$: recta secante b) $I_1 = I_2$: recta tangente c) $\nexists I$: recta exterior

Ejemplo:

Determinar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ y la recta $x - y + 1 = 0$

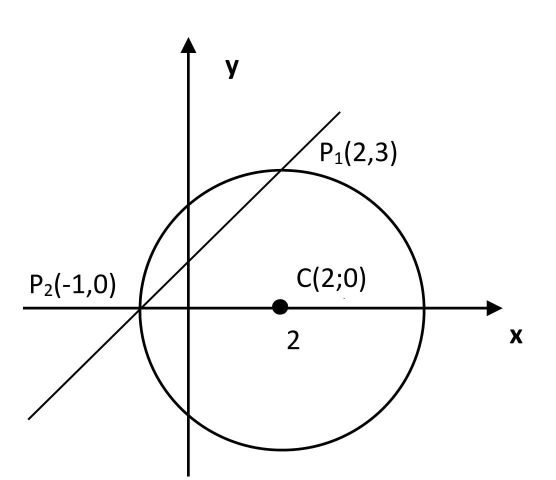
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

En la recta $x - y + 1 = 0 \quad \Rightarrow y = x + 1$ sustituimos en la ecuación de la circunferencia "y " por "x+1"

$$x^2 + (x+1)^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



para: $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 3 \;\therefore\; P_1(2;3)$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 0 \;\therefore\; P_2(-1;0)$

Coordenadas del centro y radio de la circunferencia:

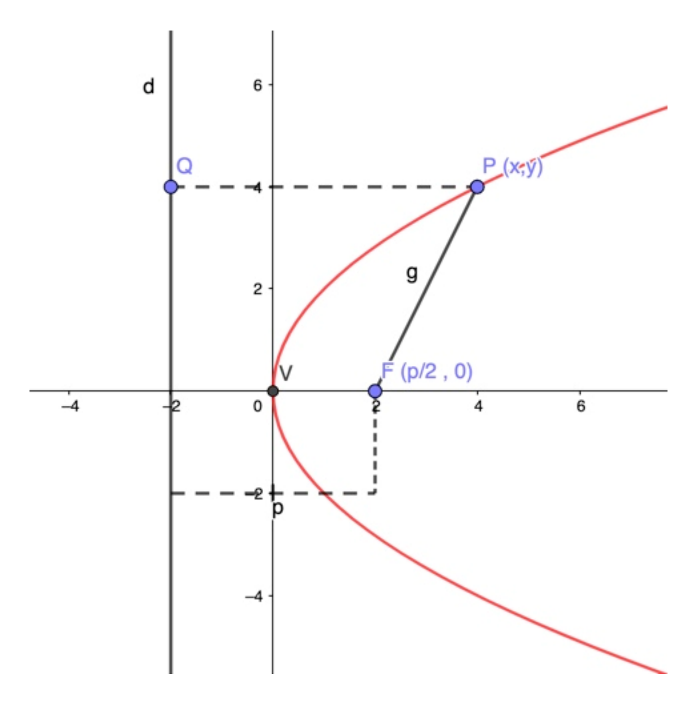
$$\begin{cases} \alpha = -\frac{D}{2} \Rightarrow \alpha = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2 \\ \beta = -\frac{E}{2} \Rightarrow \beta = 0 \\ r = \sqrt{(2^2 + 0^2 + 5)} \Rightarrow r = 3 \end{cases}$$

Actividades

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro en (-3,-5) y radio r = 3.
2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos de coordenadas A (2,3) y B (-4,5). Hallar la ecuación de la curva.
3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(7,-6) y que pasa por el punto P(2,2).
4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro C(2,-4) y es tangente al eje y.
5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es: $25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0$.

Parábola

Definición: Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado Foco y de una recta fija que recibe el nombre de Directriz.



Ecuación:

Hallaremos la ecuación para la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco en el eje **x** positivo.

Llamando p la distancia de la directriz al foco ⇒ $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ la ecuación de la directriz será: $x=-\frac{p}{2}$

De acuerdo a la definición: $\bar{F}\bar{P}=\bar{Q}\bar{P}$

$$\overline{FP}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \qquad \overline{QP}=\frac{p}{2}+x$$

resultando:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x$$

elevando al cuadrado:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

desarrollando y simplificando obtenemos:

$$x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+y^2=\frac{p^2}{4}+2\frac{p}{2}+x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^2=2px}$$

Ecuación canónica de la parábola con vértice en el Origen y eje focal horizontal.

p: recibe el nombre de parámetro y es la distancia del foco a la directriz.

$$y = \pm\sqrt{2px}$$ **Forma explícita de la ecuación.**

Para cada valor de **x** mayor que cero se obtienen dos valores iguales y contrarios de **y,** por esta razón la curva resulta simétrica con respecto al eje **x** que se denomina eje de la curva.

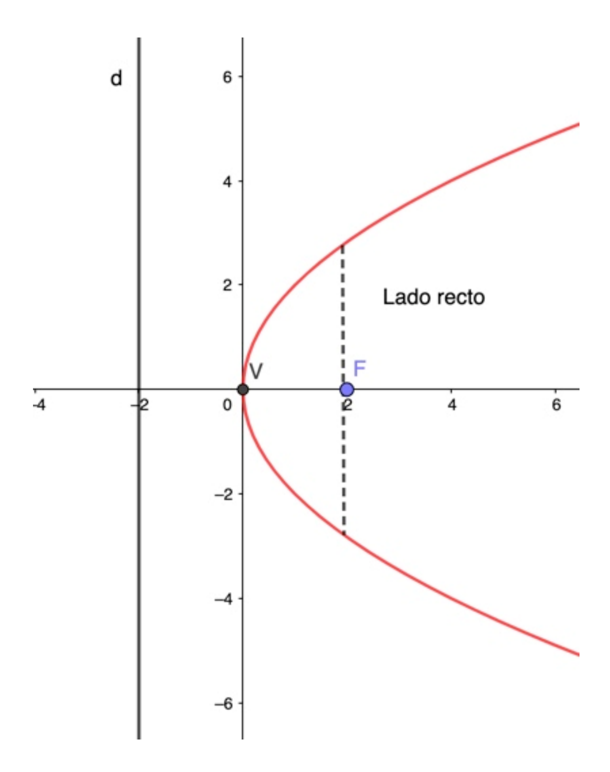
Dicho de otra forma: en la ecuación canónica de la parábola se observa que la variable **y** está elevada al cuadrado y no aparece a la potencia uno. Ello significa que para dos valores opuestos de **y** se obtiene el mismo valor de **x**, lo que en términos geométricos se traduce diciendo que la curva es simétrica con respecto al eje **x**.

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje focal, que pasando por el foco une dos puntos de la curva.

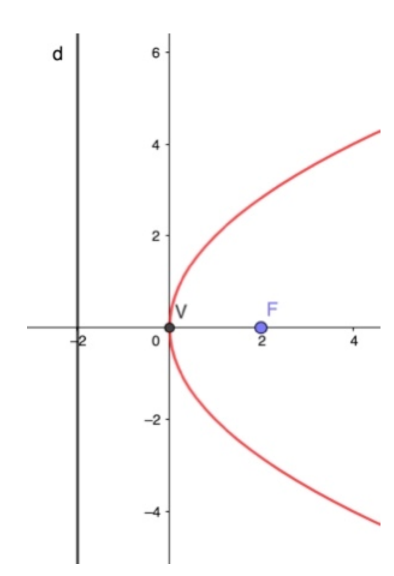
Lado recto $= \overline{MM'} = 2y$

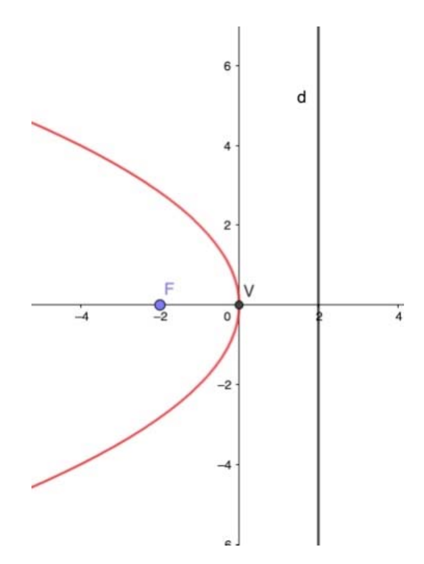
$y = \sqrt{2px} \Rightarrow$ *como:* $x = \dfrac{p}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2p\dfrac{p}{2}} \Rightarrow y = p$

Lado recto $\bar{M}\bar{M}' = 2p$



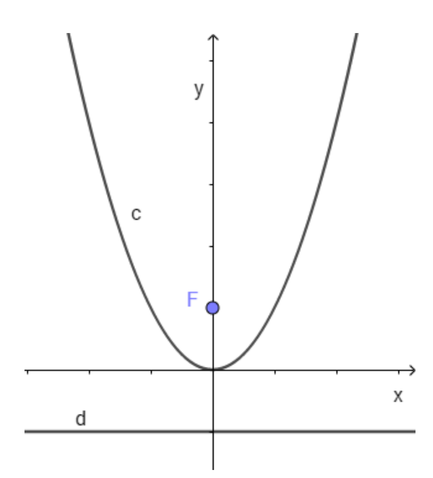
Posiciones particulares de la parábola

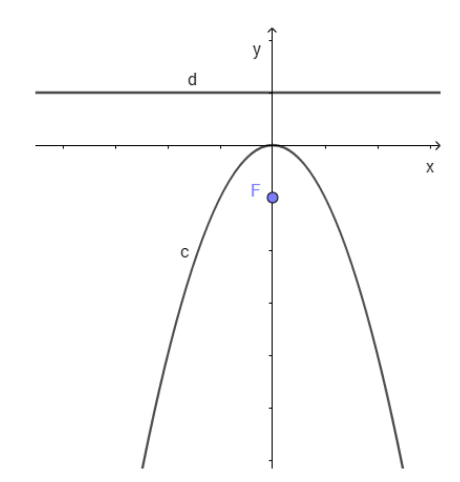




Ecuación c: $y^2 = 2px$
Ejemplo: $y^2 = 4x$
Foco: $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$
Directriz: $x = -\frac{p}{2}$

Ecuación c: $y^2 = -2px$
Ejemplo: $y^2 = -4x$
Foco: $\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$
Directriz: $x = \frac{p}{2}$





Ecuación: $x^2 = 2py$
Ejemplo: $x^2 = 4y$

Foco: $\left(0; \frac{p}{2}\right)$
Directriz: $y = -\frac{p}{2}$

Ecuación: $x^2 = -2py$
Ejemplo: $x^2 = -4y$

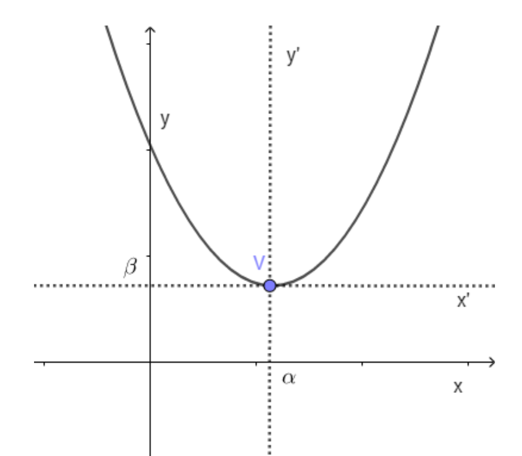
Foco: $\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
Directriz: $y = \frac{p}{2}$

Ecuaciones de la parábola de vértice desplazado

De la ecuación:

$x^2 = 2py \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2p}x^2;\;\; si: \frac{1}{2p} = a \;\Rightarrow\; \boxed{y = ax^2}$

La ecuación de la parábola de vértice



V (α;β) y eje paralelo al eje y es :

$y' = a\,x'^2$ (1)

Con respecto al sistema " **x ; y** " la ecuación de la parábola será:

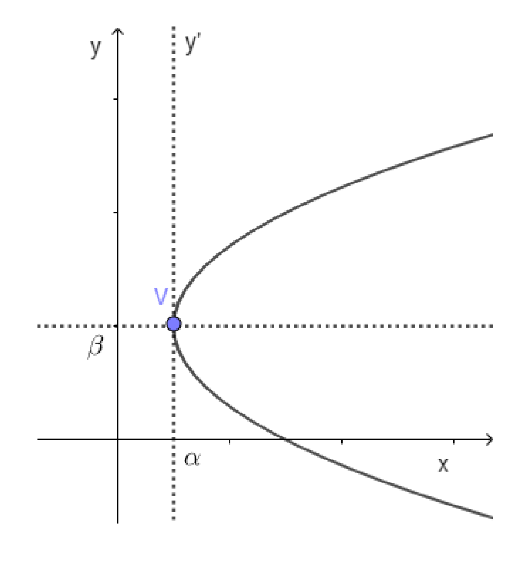
como; $x' = x -$ $y' = y - \beta$

sustituyendo en (1) : $\boxed{y - \beta = a(x - \alpha)^2}$

$\Rightarrow y = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$

si: $-2a\alpha = b \;\wedge\; a\alpha^2 + \beta = c$

$\Rightarrow \boxed{y = ax^2 + bx + c}$



Si el eje de la parábola es paralelo al eje **x** y el vértice es $V(\alpha;\beta)$ su ecuación es:

$\boxed{x' = ay'^2}$

Y respecto al sistema " **x ; y** " : $\boxed{x - \alpha = a(y - \beta)^2}$

$\Rightarrow x = ay^2 - 2a\beta y + a\beta^2 + \alpha$

si: $-2a\beta = b \;\wedge\; a\beta^2 + \alpha = c$

$\Rightarrow \boxed{x = ay^2 + by + c}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco está en (1 ; 3) y su directriz es x = 5.

De acuerdo al esquema vemos que el vértice V tiene por coordenadas (3 ; 3).

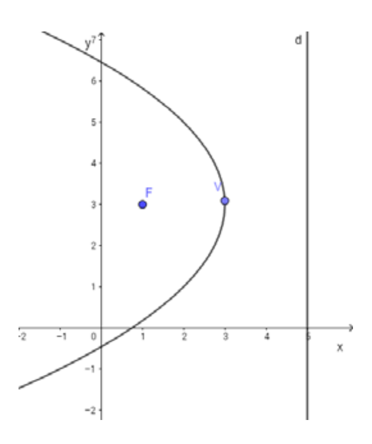
Su ecuación es de la forma:

$(y-\beta)^2 = -2p(x-\alpha)$

$\Rightarrow (y-3)^2 = -2 \bullet 4(x-3)$

$(y-3)^2 = -8 \bullet (x-3)$

$(y-3)^2 + 8x - 24 = 0$



Actividades

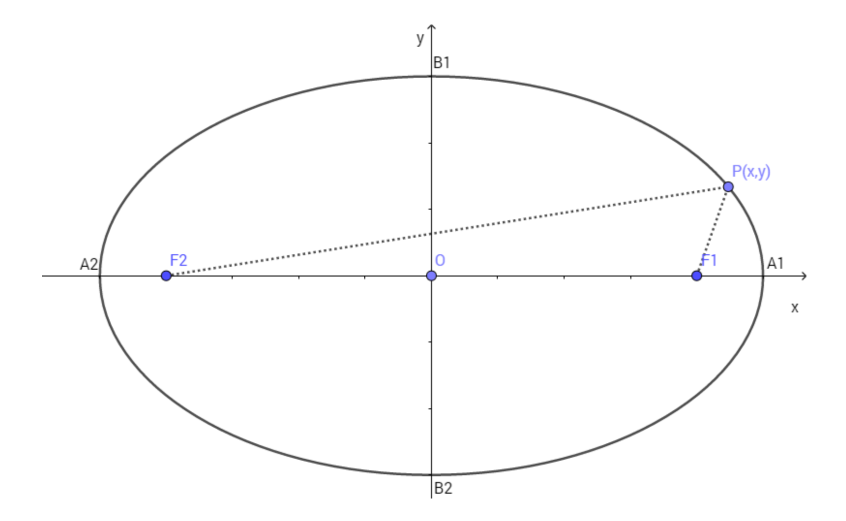
1. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco en el punto (4,0).
2. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco en el punto (0,-3).
3. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz de ecuación y – 5 = 0
4. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz de ecuación x + 3 =0.
5. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje x pasa por el punto (-2,4). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Elipse

Definición: Es el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante.

Siendo F_1 y F_2 focos de la elipse y P un punto genérico perteneciente a la elipse

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$



Elementos

Eje mayor: $\overline{A_1A_2} = 2a$; (si suponemos que la línea punteada F_2PF_1 es un hilo inextensible, cuando el punto P toma la posición de A_1 resulta sencillo verificar por la igualdad de los segmentos A_2F_2 y A_1F_1 que la longitud de dicho hilo es $A_1A_2 = 2A_10 = 2a$;

Semieje mayor: $\overline{A_1O} = \overline{OA_2} = a$;

Eje menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$;

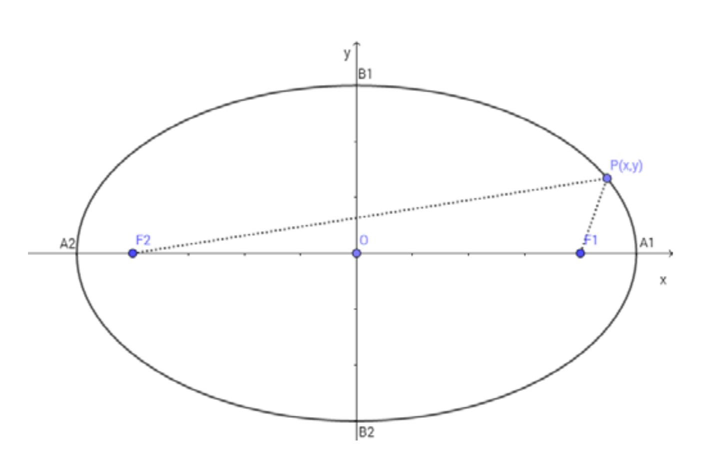
Semieje menor: $\overline{B_1O} = \overline{OB_2} = b$;

Vértices: $A_1(a;0); A_2(-a;0); B_1(0;b); B_2(0;-b)$;

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$;

Semieje focal: $\overline{F_1O} = \overline{OF_2} = c$;

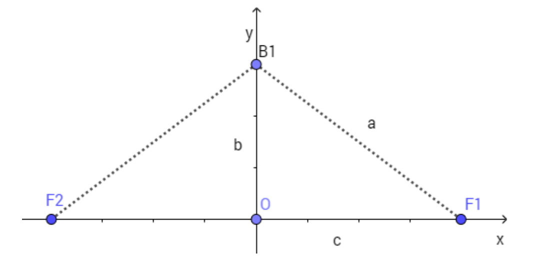
Focos: $F_1(c;0); F_2(-c;0)$;



$B_1 \in$ a la elipse y satisface la condición: $\bar{F}_1\bar{B}_1 + \bar{B}_1\bar{F}_2 = 2a$

como $\bar{F}_1\bar{B}_1 + \bar{B}_1\bar{F}_2 = 2a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$.

Ecuación



$P(x;y) \in$ a la elipse $\Rightarrow \bar{P}\bar{F}_1 + \bar{P}\bar{F}_2 = 2a$ (1)

aplicando el Teorema de Pitágoras en $\overset{\Delta}{PRF_1}$ y $\overset{\Delta}{PRF_2}$ respectivamente:

$$\bar{P}\bar{F}_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \wedge \quad \bar{P}\bar{F}_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

reemplazando en (1) : $\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

aislando la primera de las raíces cuadradas y elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

agrupando, simplificando y elevando al cuadrado:

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

agrupando variables:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

como: $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

dividiendo por a^2b^2 obtenemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación canónica de la elipse de centro en el origen de coordenadas y eje focal x.

La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser escrita como: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ que es un caso particular de la ecuación de 2º grado en **x** e **y**.

Forma explícita de la ecuación de la elipse.

De la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ despejamos y $\Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ **;** donde observamos que tendremos valores reales de **y** si $a^2 - x^2 \geq 0$:

Si $a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq x^2 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

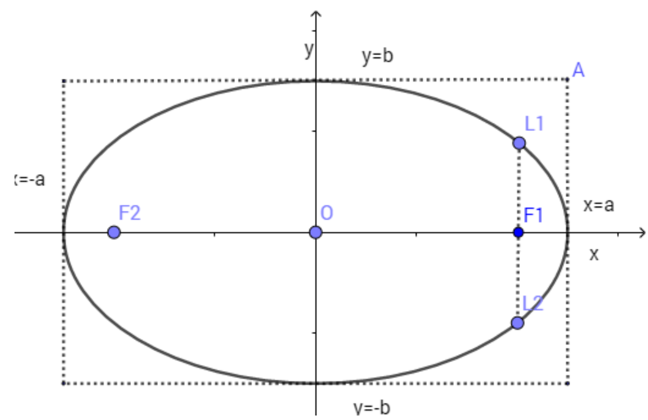
De donde $\begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}$ rectas que limitan la elipse.

Entonces **y** es real solo para $|x| \leq a$.

Si de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ despejamos **x** : $\Rightarrow x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$

Para valores reales de x: $b^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -b \leq y \leq b$

de donde $\begin{cases} x = b \\ x = -b \end{cases}$ rectas que limitan la elipse.Entonces **x** es real solo para $|y| \leq b$



Del estudio de la figura precedente deducimos:

1: La elipse es simétrica respecto al origen y a los ejes coordenados por estar las variables de su ecuación canónica elevadas al cuadrado y no aparecer a la potencia uno.

2: La elipse es interior al rectángulo limitado por las rectas : $x = \pm a \wedge y = \pm b$

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje focal que une dos puntos de la elipse.

$Lr = \bar{L}_1\bar{L}_2$; como $\bar{L}_1\bar{L}_2 = \bar{L}_1\bar{F}_1 + \bar{F}_1\bar{L}_2$ y $\bar{L}_1\bar{F}_1 = \bar{F}_1\bar{L}_2 \Rightarrow Lr = 2\bar{L}_1\bar{F}_1$

$\bar{L}_1\bar{F}_1 = y$; considerando la ecuación explícita de la elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

reemplazando “x “ por “c” :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a} \Rightarrow 2y = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow Lr = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad

Es el cociente $\frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$; *como* $c < a \Rightarrow e < 1$

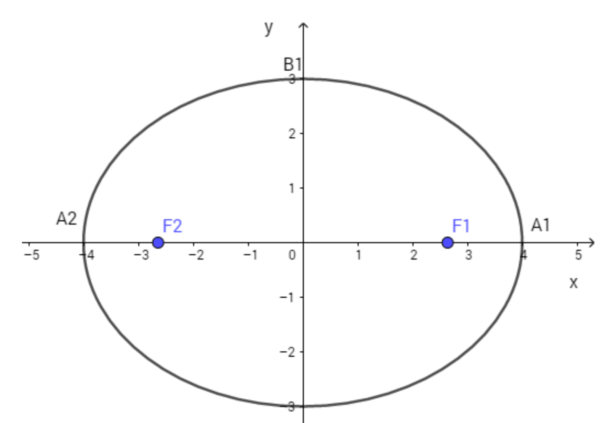
$Si\ c = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow$ los focos coinciden y la curva es una circunferencia.

Posiciones particulares de la elipse

Dada una elipse mediante su ecuación canónica, el eje mayor (eje focal) corresponde al eje coordenado de la variable que tiene mayor denominador.

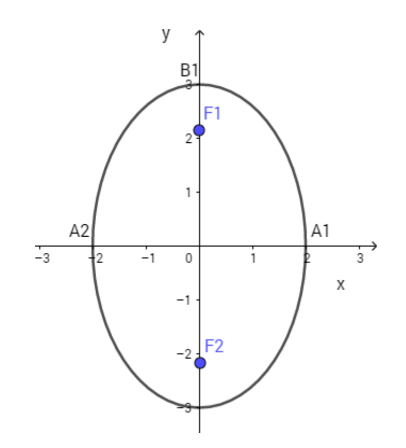
1.- Eje mayor sobre el eje **x**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$



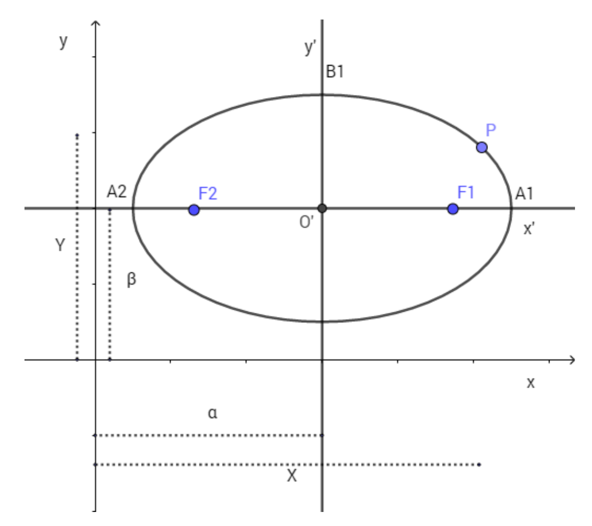
2.- Eje mayor sobre el eje **y** : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Ejemplo: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



Ecuación de la elipse de centro desplazado

Los ejes **x´** e **y´** son ejes paralelos a los ejes **x** e **y**. **P** es un punto de la elipse que tiene coordenadas (x´; y´) respecto al sistema de origen **O´(α,β)** y coordenadas (x, y) respecto al sistema de origen **O(0,0)**.



La ecuación de la elipse es: $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ cuando se refiere al sistema O´(x´;y´).

Como $\begin{cases} x' = x-\alpha \\ y' = y-\beta \end{cases}$ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ecuación de la elipse de centro en (α;β) y eje focal paralelo al eje x.

Si el eje focal es paralelo al eje y la correspondiente ecuación resulta: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$

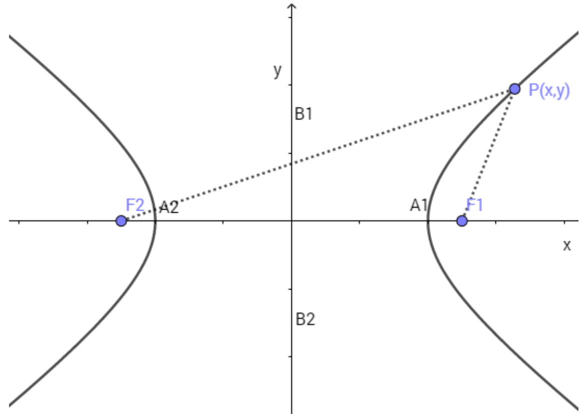
Actividades

1. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos, en las elipses, cuyas ecuaciones son:
   - 1.1 $9x^2 + 4y^2 = 36$
   - 1.2 $16x^2 + 25y^2 = 400$
   - 1.3 $4x^2 + 9y^2 = 36$
   - 1.4 $x^2 + 3y^2 = 6$
2. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4,0), (-4,0) y cuyos focos son los puntos (3,0); (-3,0)
3. Los vértices de una elipse son los puntos (0,6) ; (0,-6) y sus focos son los puntos (0,4);(0,-4). Hallar su ecuación.
4. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (2,0);(-2,0) y su excentricidad es igual a 2/3.
5. La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 + 2x – 12y + 6 = 0$. Determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

Hipérbola

Definición: Es el conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante.

Si F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola, para todo punto P perteneciente a la hipérbola se verifica: $\bar{P}\bar{F}_2 - \bar{P}\bar{F}_1 = 2a$





Elementos

Eje focal o transverso: $\bar{A}_1\bar{A}_2 = 2a$;

Eje conjugado, ideal o imaginario: $\bar{B}_1\bar{B}_2 = 2b$;

Vértices: $\mathrm{A_1(a;0); A_2(-a;0); B_1(0;b); B_2(0;-b)}$;

Distancia focal: $\bar{F}_1\bar{F}_2 = 2c$;

Focos: $F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$;

$$\left.\begin{array}{r} \bar{F}_1\bar{F}_2 = 2c \\ \bar{P}\bar{F}_2 - \bar{P}\bar{F}_1 = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow 2c > 2a \Rightarrow c > a$$

Ecuación

Como $\mathrm{P(x,y)} \in$ a la hipérbola $\Rightarrow \mathrm{\bar{P}\bar{F}_2 - \bar{P}\bar{F}_1 = 2a}$

$$\mathrm{\bar{P}\bar{F}_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \wedge \mathrm{\bar{P}\bar{F}_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

reemplazando: $\Rightarrow \mathrm{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$

aislando la primera de las raíces del primer miembro y elevando luego ambos miembros al cuadrado: $\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$

$$4cx - 4a^2 = 4a \bullet \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

desarrollando los cuadrados y agrupando:

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

agrupando variables:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

En B_1OA_1;

$$b^2 = c^2 - a^2$$

dividiendo por a^2b^2obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación canónica de la hipérbola de eje focal x, y centro en el origen de coordenadas.

La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser escrita como: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; que es un caso particular de la ecuación de 2º grado en x e y.

Si de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ despejamos y:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

la última expresión nos permite observar que la curva es simétrica respecto al eje x. Con respecto a y podemos decir que toma valores reales para x variando de menos a más infinito, con excepción de intervalo $|x| < a$, en el qlue " **y**" toma valores imaginarios; " **x** " varía:

$$\begin{cases} -\infty < x \leq -a \\ a \leq x < \infty \end{cases}$$

resultando una curva externa a la faja limitada por las rectas:

$$\begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}$$

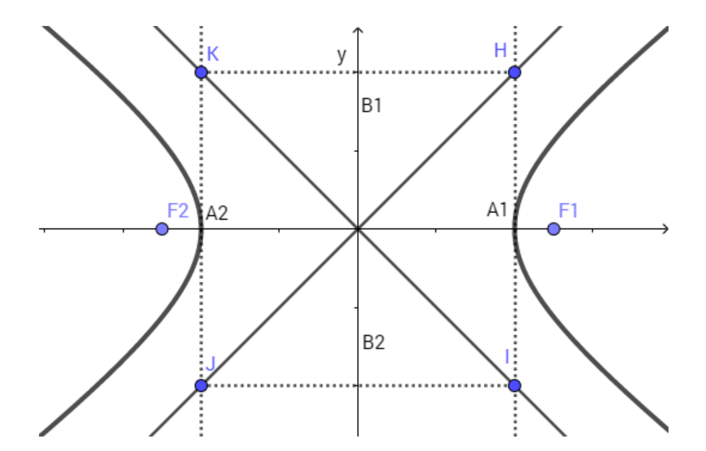
Despejando x:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$$

se verifica que la curva es simétrica respecto al eje y:

Si: $y = 0 \Rightarrow x = \pm a$

Entonces la curva corta al eje x en los puntos: $A_1(a; 0)$ y $A_2(-a; 0)$ vértices y determinan $\bar{A}_1\bar{A}_2 = 2a$; que es la longitud del eje focal.



El rectángulo **HIJK** de centro **O** y lados perpendiculares a los ejes, se denomina: rectángulo fundamental de la hipérbola.

Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje coordenado, que pasando por el foco, une dos puntos de la hipérbola: $\bar{L}_1\bar{L}_2$

$\bar{L}_1\bar{L}_2 = 2y$: $\quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ en $L_1(c; y)$

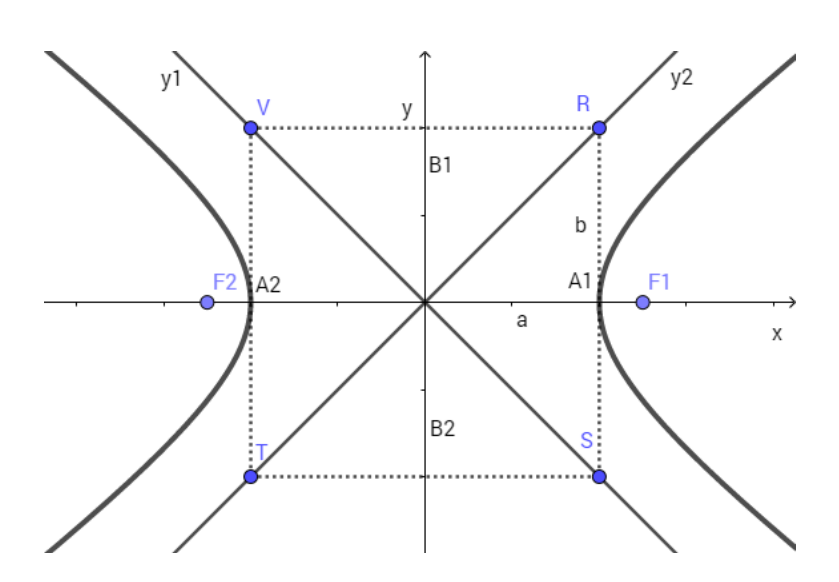
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore 2y = 2\frac{b^2}{a} \Rightarrow \bar{L}_1\bar{L}_2 = 2\frac{b^2}{a}$$

Excentricidad: Es el cociente $\frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$, como $c > a \Rightarrow e > 1.$

Asíntotas de la hipérbola

Son las rectas que están sobre las diagonales del rectángulo fundamental: tienen como ecuaciones: $y_1 = -\frac{b}{a}x$; $\quad y_2 = \frac{b}{a}x$



RSTV: rectángulo fundamental.

Se muestra que: $(y_a - y_b) \to 0$ cuando $x \to \infty$

En efecto: $y_a = \frac{b}{a}x$ (asíntota)

$y_b = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hipérbola)

$d = y_a - y_b$

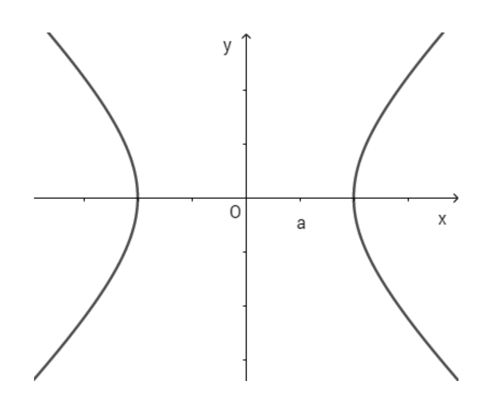
$$d = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad d = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{x^2 - x^2 - a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) = \frac{b}{a} \bullet \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

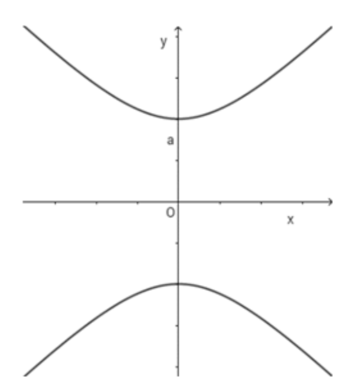
$$\lim_{x \to \infty}(y_a - y_b) = \lim_{x \to \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0 \qquad \text{si} \quad x \to \infty \Rightarrow d \to 0$$

Posiciones particulares de la hipérbola

El eje focal de la hipérbola, corresponde siempre a la variable de coeficiente positivo, no importando que a < b o a > b.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$





Ejemplo

Dada la ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$, obtener las coordenadas de los vértices y focos; excentricidad, longitud del lado recto, ecuación de las asíntotas.

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad\qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$ **Ecuación canónica**

Solución:

Vértices: $a = 2$ y b=3

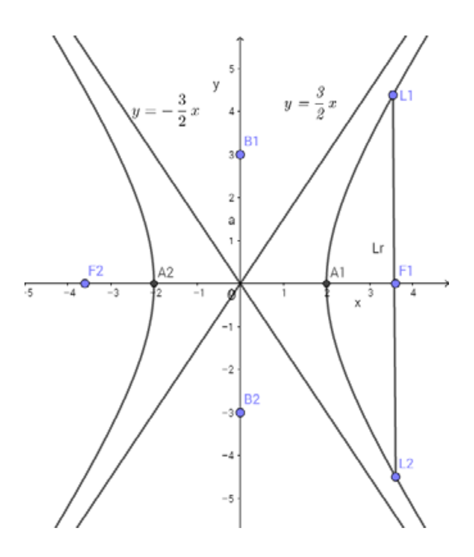
$\Rightarrow A_1(2; 0);\ A_2(-2; 0);\ B_1(0; 3);\ B_2(0; -3)$

Focos: $c = \sqrt{a^2 + b^2} \cong 3{,}6 \Rightarrow F_1(3{,}6; 0);\ F_2(-3{,}6; 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{3{,}6}{2} = 1{,}8$

Lado recto: $\bar{L}_1\bar{L}_2 = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \bar{L}_1\bar{L}_2 = 9$

Ecuación de las asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow \quad y_1 = \frac{3}{2}x \quad \wedge \quad y_2 = -\frac{3}{2}x$

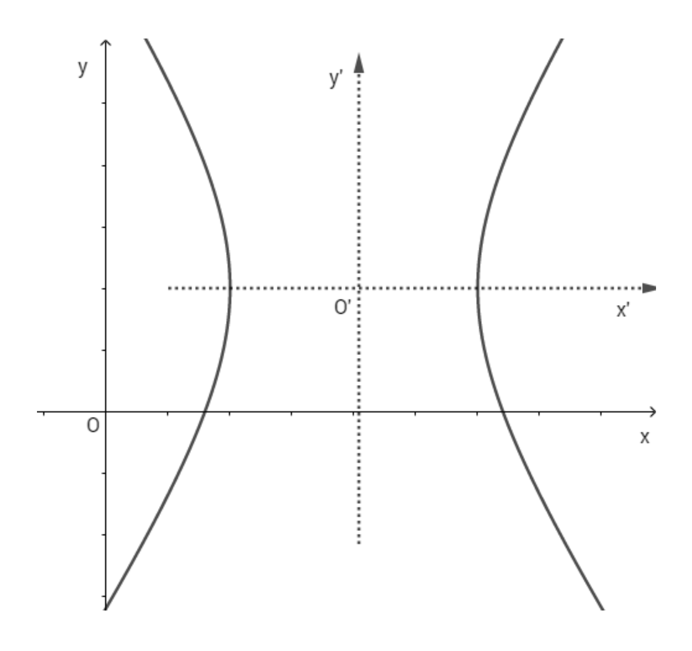


Hipérbola Equilátera

Cuando una hipérbola tiene a = b recibe el nombre de hipérbola equilátera; el rectángulo fundamental es un cuadrado y las asíntotas son perpendiculares entre sí.

Si a = b la ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, es decir: $x^2 - y^2 = a^2$; con asíntotas: $y = x$, $y = -x$

Ecuación de la hipérbola de centro desplazado



La ecuación de la hipérbola referida al sistema **x´y´** es :$\frac{x\prime^2}{a^2} - \frac{y\prime^2}{b^2} = 1$

Utilizando las fórmulas de traslación de ejes: $\begin{cases} x': x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$

resulta: : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ que corresponde a la ecuación de la hipérbola cuyo centro es el punto $C(\alpha;\beta)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje x.

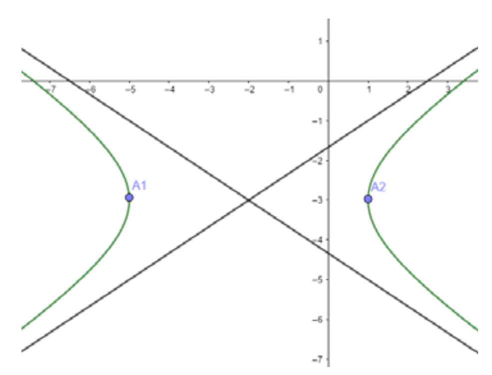
Si el eje focal es paralelo al eje y, su ecuación es: $\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$

Ejemplos

1. Representar gráficamente la cónica de ecuación: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

Coordenadas del centro: $(\alpha;\beta) = (-2;-3)$

Eje focal: F_1F_2 y ; $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow A_1(1;-3)$; $A_2(-5;-3)$



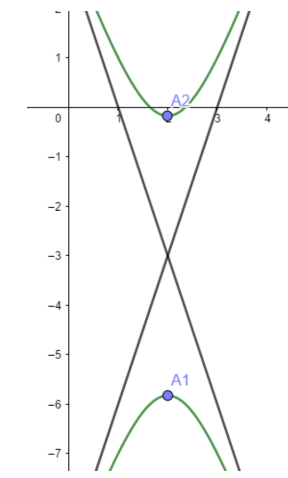
2. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $(2;0)$ y $(2;-6)$; con un extremo del eje conjugado en $(3;-3)$.

De acuerdo con los datos: $F_1F_2 \perp x$

Responde a la ecuación: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$

El centro es punto medio del segmento que une los focos. C $(\alpha,\beta) = (2;-3)$

$$\begin{cases} a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 - 1^2 \Rightarrow a^2 = 8 \\ b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 3^2 - 8^2 \Rightarrow b^2 = 1 \end{cases}$$



Ecuación: $\frac{(y+3)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{1^2} = 1$

Actividades

1. Para las ecuaciones de las siguientes hipérbolas hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y no transverso, la excentricidad y la longitud de cada lado recto.

1.1 $9x^2 - 4y^2 = 36$ 1.2 $9y^2 - 4x^2 = 36$. 1.3 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 1.4 $x^2 - 4y^2 = 4$

2. Los vértices de una hipérbola son los puntos (2,0); (-2,0) y sus focos son los puntos de coordenadas (3,0) y (-3,0). Hallar su ecuación y su excentricidad.

3. El centro de una hipérbola está en el origen y su eje transverso está sobre el eje y. Si un foco es el punto (0,5) y la excentricidad es igual a 3, hallar la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

4. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso está sobre el eje y. La longitud de cada lado recto es 2/3 y la hipérbola pasa por el punto (-1,2). Hallar su ecuación.

Superficies

En todas las carreras técnicas se considera conveniente un acercamiento a las Geometrías, sobre todo en aquellas que como la Arquitectura necesitan un dominio de los aspectos espaciales donde se instalarán o construirán los ingenios creados en los talleres de diseño.

Desde hace algunos años ha sido nuestra preocupación el estudio metodológico de la enseñanza de la Geometría, en particular de aquellos problemas del espacio tridimensional que presentan un importante grado de dificultad en la visualización y en el aprendizaje.

Antes de comenzar a desarrollar la unidad, recordemos algunas fórmulas:

$Ax + By + C = 0$ ecuación general de una recta en E^2.

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$ es un par de rectas en el plano xy.

Ecuación de las cónicas con centro

$x^2 + y^2 = r^2$ Ecuación de la circunferencia

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ecuación de la elipse

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ecuación de la hipérbola

Y la ecuación de cónica sin centro

$x^2 = 2py$ ó $y^2 = 2px$ Ecuación de la parábola

Y las respectivas ecuaciones de las cónicas desplazadas.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ecuación de la circunferencia con centro en C(h,k).

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ecuación de la elipse con centro en C(h,k).

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ecuación de la hipérbola con centro en C(h,k)

$(x-h)^2=2p(y-k)$ ecuación de la parábola con vértice en V(h,k)

Se llama superficie al lugar geométrico formado por el conjunto de todos los puntos $\mathrm{P}(\mathrm{x};\mathrm{y};\mathrm{z})$ de R^3 que verifican la ecuación $F(x;y;z)=0$.

Primero comenzaremos por la superficie más sencilla: **el plano**, cuya ecuación completa está dada por $Ax+By+Cz+D=0$, como la hemos visto en capítulos anteriores, y a continuación escribiremos las ecuaciones particulares a cada una de las posiciones de los mismos:

$\mathrm{Ax}+By+Cz=0$ Ecuación de un plano que contiene al origen del sistema de referencia.

$Ax+By+D=0$ Ecuación de un plano paralelo al eje z (la forma es análoga a la de una recta en E^2).

$Ax+By=0$ Ecuación de un plano que contiene al eje z (la forma es análoga a la de una recta de E^2 que contiene al origen).

$\mathrm{Ax}+D=0$ Ecuación de un plano paralelo al plano coordenado yz (la forma es análoga a la de una recta de E^2 paralela al eje y).

$\mathrm{Ax}=0$ Ecuación del plano coordenado yz (la forma es análoga a la de la ecuación del eje y en E^2).

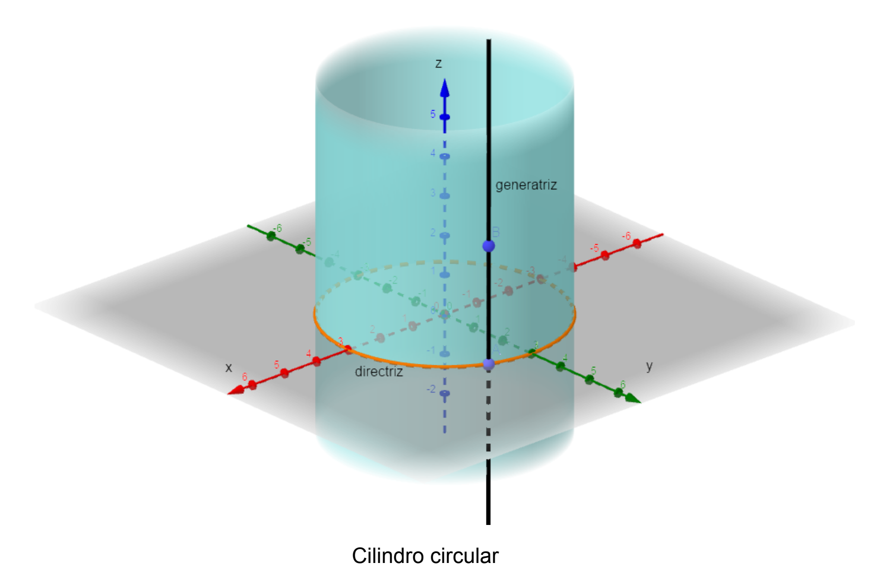
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$ la ecuación representa un par de planos (la forma es análoga a un par de rectas en E^2)

A continuación les siguen los cilindros, los cuales los podemos definir como:

Cilindros

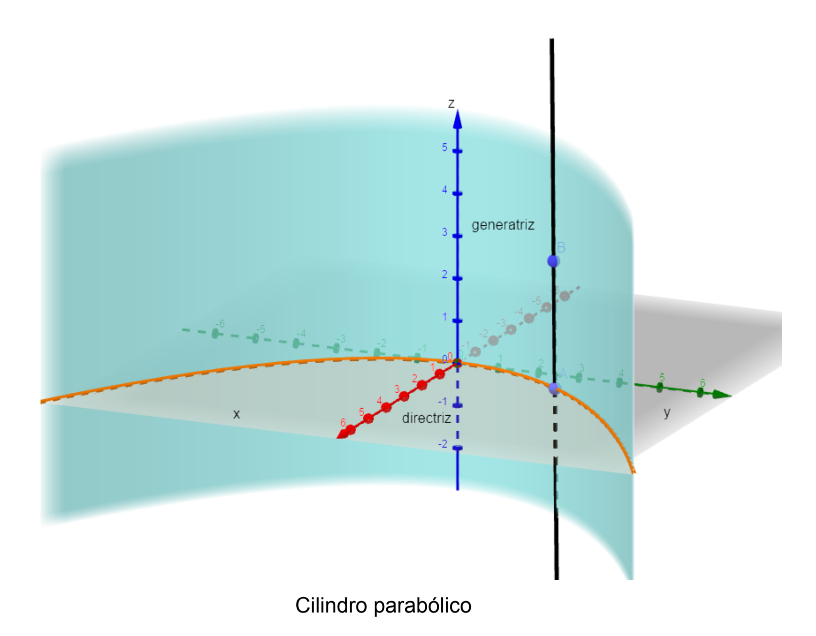
Es una superficie generada por una recta que se mueve a lo largo de una curva plana de tal manera que siempre permanece paralela a una recta fija que no está contenida en el plano de la curva dada. La recta que se mueve se denomina **generatriz** del cilindro, y la curva plana dada se llama **directriz** del cilindro. Cualquier posición de una generatriz recibe el nombre de regladura del cilindro.

La siguiente figura muestra un cilindro circular cuya directriz es $x^2+y^2=r^2$, la cual esta en el plano xy y sus regladuras son paralelas al eje z.



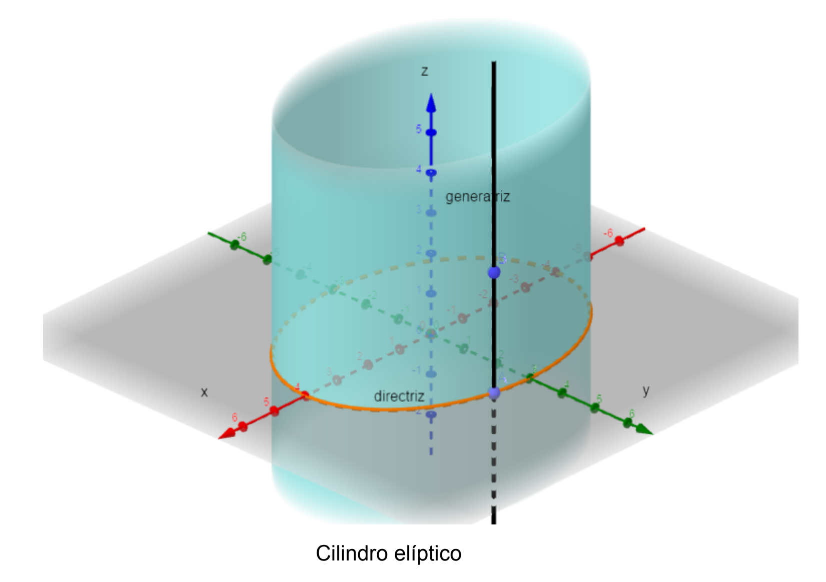
Cilindro circular

Si la generatriz en el plano xy es una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, cuyas regladuras son paralelas al eje z, se denomina cilindro parabólico.



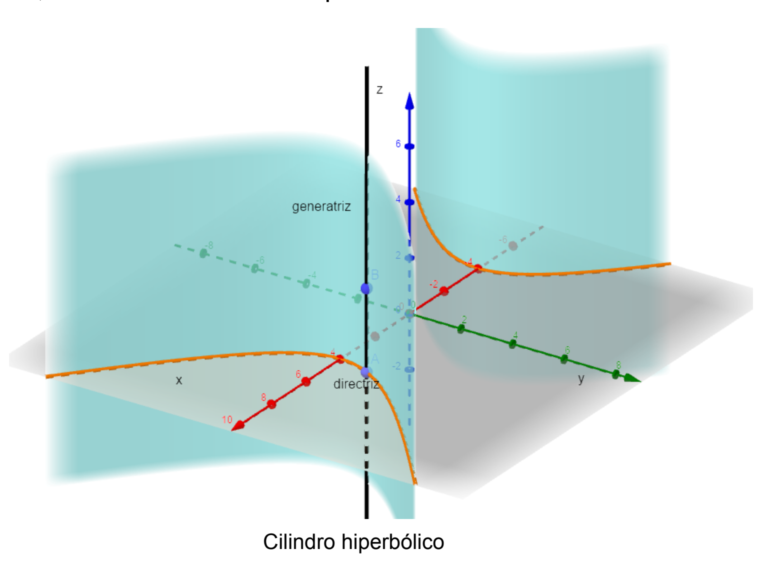
Cilindro parabólico

Si la generatriz en el plano xy es una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cuyas regladuras son paralelas al eje z, se denomina cilindro eliptico.



Cilindro elíptico

Si la generatriz en el plano xy es una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, cuyas regladuras son paralelas al eje z, se denomina cilindro hiperbólico.



Cilindro hiperbólico

En el espacio tridimensional no resulta posible describir todas las superficies como lugar geométrico (sólo los planos, la esfera, los cilindros y los conos tienen esa propiedad) y en consecuencia el único recurso abordable es escribir la ecuación general de segundo grado en tres variables

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}$$

y luego mediante rotaciones y traslaciones realizadas por completamiento de cuadrados que resulten adecuadas, llegar a:

$\boldsymbol{A''x''^2 + B''y''^2 + C''z''^2 + J = 0}$ (**forma canónica de las cuádricas con centro**).

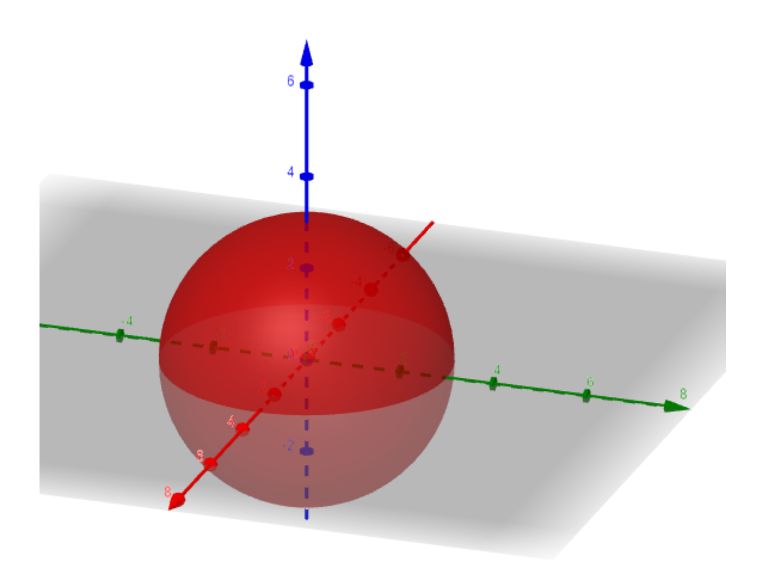
ó

$\boldsymbol{A''x''^2 + B''y''^2 + Iz = 0}$ (forma canónica de las cuádricas sin centro).

Los casos particulares que pueden presentarse provienen de las distintas combinaciones de signos entre los coeficientes de los términos cuadráticos. Para las cuádricas con centro pueden escribirse las ecuaciones:

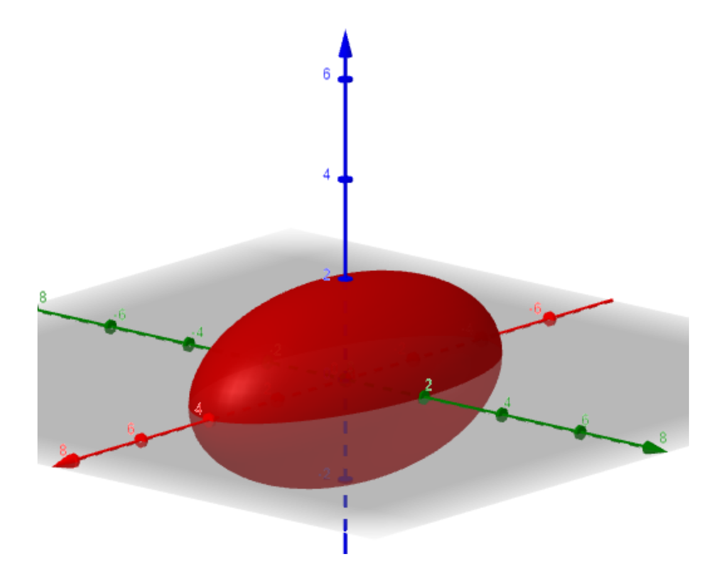
Superficie Esférica o Esfera

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$



Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

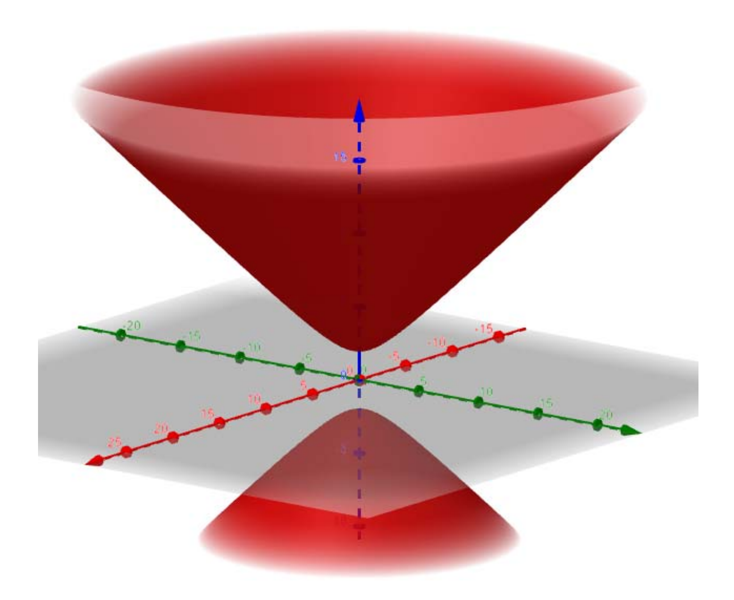


Hiperboloide de 1 hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hiperboloide de 2 hojas

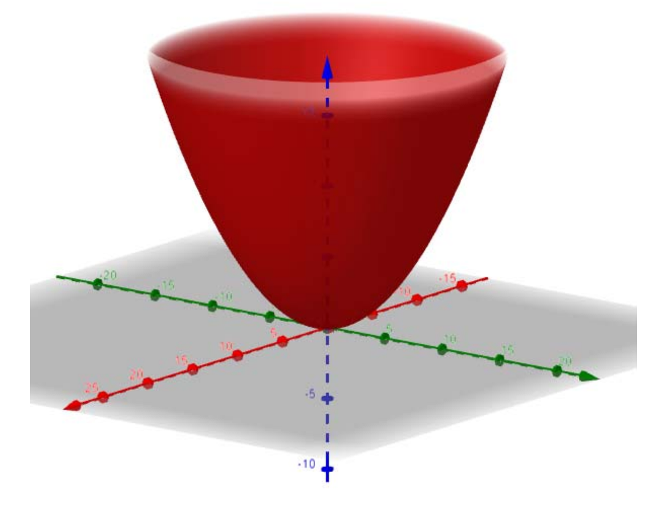
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Para las cuádricas sin centro:

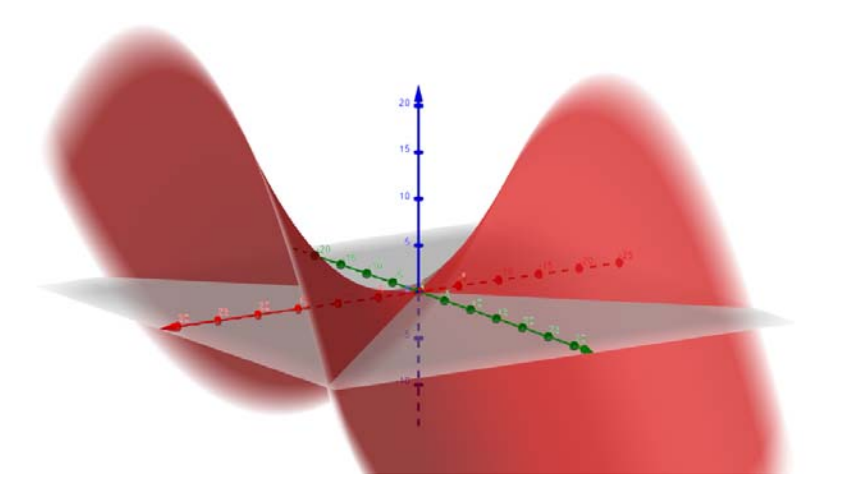
Paraboloide Elíptico

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$



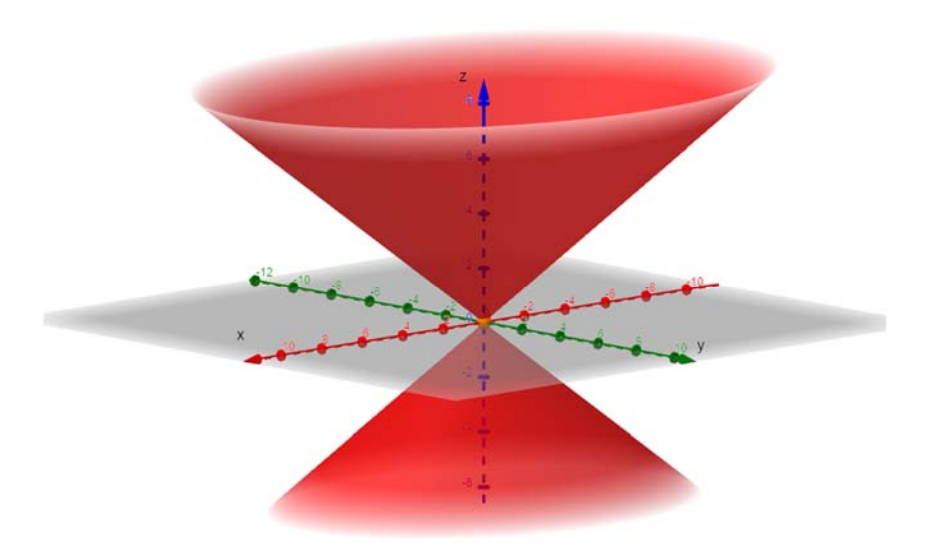
Paraboloide Hiperbólico

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$



Cono

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Debe recordarse como concepto fundamental que, en el espacio tridimensional, una curva cualquiera sólo puede expresarse en forma analítica como intersección de al menos dos de las infinitas superficies que se cortan según ella. Resulta imposible, por lo tanto, hablar de la ecuación de una curva en dicho espacio. Recordemos que la recta en el espacio tridimensional se obtuvo a partir de la intersección de dos planos.

Reforzamos este concepto con el siguiente ejemplo

Las ecuaciones de la circunferencia del espacio ubicada sobre un plano paralelo al plano coordenado **xy,** de centro en **C(0,0,2)** y radio **r=2** pueden expresarse como:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2=4 \\ z\ =2 \end{cases}$$

La primer ecuación representa una esfera con Centro en C(0,0,2) y radio r=2 y la segunda ecuación representa un plano paralelo al plano xy y que contiene al punto P(0,0,2)

Como puede comprobarse fácilmente, no es ésta la única manera de expresar **las ecuaciones** de la curva; si reemplazamos en la ecuación de la esfera la variable **z** por la constante **2** (cota a la cual se produce el corte, fijada por la ecuación del plano) resulta:

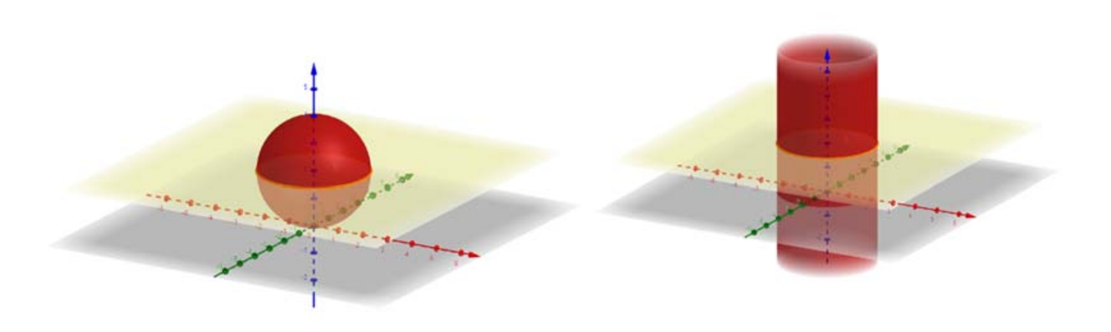
$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z\ =2 \end{cases}$$

que, como vemos es la ecuación de un cilindro de eje z y la segunda un plano paralelo al plano xy

Verificándose que al reemplazar en la ecuación de la superficie que se estudia una de las variables por una constante, se obtiene la ecuación de un cilindro o en su defecto, como veremos, la ecuación conjunta de un par de planos.

Resulta posible entonces, al cortar una superficie cuya forma nos es desconocida con un plano paralelo a un plano coordenado, reemplazar su ecuación por la de un cilindro de forma conocida que contenga la curva intersección y, en consecuencia permita identificarla.





como intersección de esfera y plano

como intersección de cilindro y plano

Actividades

1. Estudiar y representar gráficamente:

1.1 La superficie cilíndrica cuya directriz es la circunferencia. $x^2 + y^2 = 9$ para z = 0

1.2 La superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola $y^2 = 4x$ para z = 0

1.3 La superficie cilíndrica cuya directriz es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ para z = 0

2. Representar gráficamente la superficie cónica cuya ecuación es:

2.1 $2x^2 + 3z^2 - y^2 = 0$

2.2 $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$

2.3 $y^2 + z^2 - 2x^2 = 0$

3. Representar la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$

3.1 Hallar la ecuación de la esfera cuyo centro es el punto O(2,-1,3) y radio r = 4

3.2 Hallar la ecuación de la esfera cuyo centro es el punto O(-1, 2, 4) y radio $r = \sqrt{3}$

3.3 Hallar la ecuación de la esfera de centro O(6, 3, -4) y tangente al eje de las abscisas “x”.

4. Representar los siguientes elipsoides

4.1 $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 144$

4.2 $16\,y^2 + 4z^2 = 100 - x^2$

5. Representar gráficamente los siguientes hiperboloides:

5.1 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$

5.2 $36x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 144$

5.3 $36y^2 - 9x^2 - 16z^2 = 144$

5.4 $4z^2 - x^2 - 9y^2 = 36$

Bibliografía

Swokowski, E.,(1987). Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. México

Leithold, L., (1987). Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla. México

Larson, R. (2001). Cálculo y geometría analítica. (6ª ed). México. Programas Educativos S.A.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

CAPÍTULO 10
Cálculo Diferencial

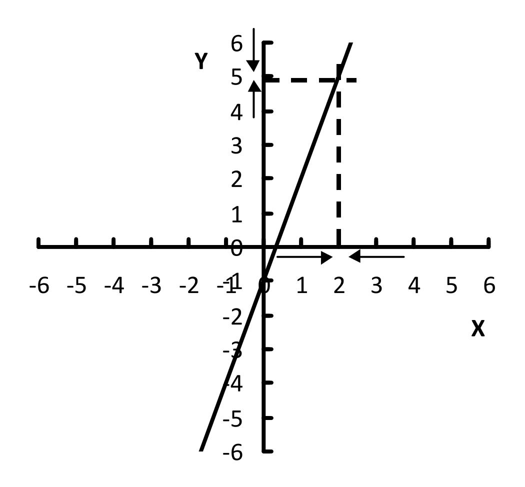
Stella Maris Arrarás y Viviana Beatriz Cappello

Límite y Derivada

Definición: Definimos intuitivamente, al límite **L** de una función f(x) de variable real, al número al cual se aproxima la función cuando la variable independiente **x**, se aproxima a un valor **a**; se simboliza:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Si nos interesa estudiar a qué valor se aproxima la función $f(x) = 3x - 1$ cuando la variable independiente x se aproxima al valor 2



Si nos aproximamos a 2 por la izquierda vemos que la función se aproxima al valor 5 y si nos aproximamos al valor 2 por la derecha también vemos que la función se aproxima al valor 5, esto lo escribimos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(3x-1) = 5 \quad \text{(límite por izquierda de f(x))} \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1) = 5 \quad \text{(límite por derecha de f(x))} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2}(3x-1) = 5$$

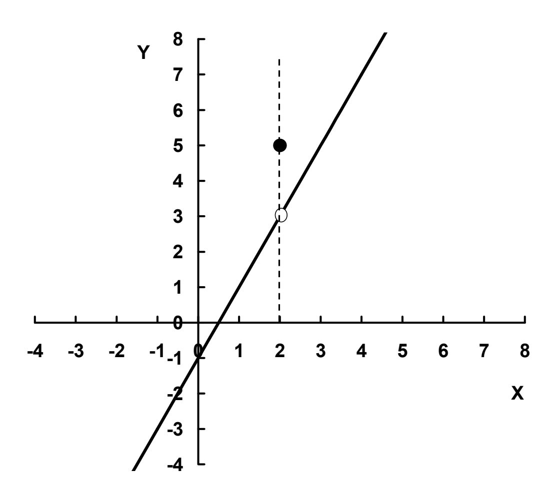
Estudio de límites en forma gráfica

Podemos analizar el cálculo de un límite en forma gráfica.

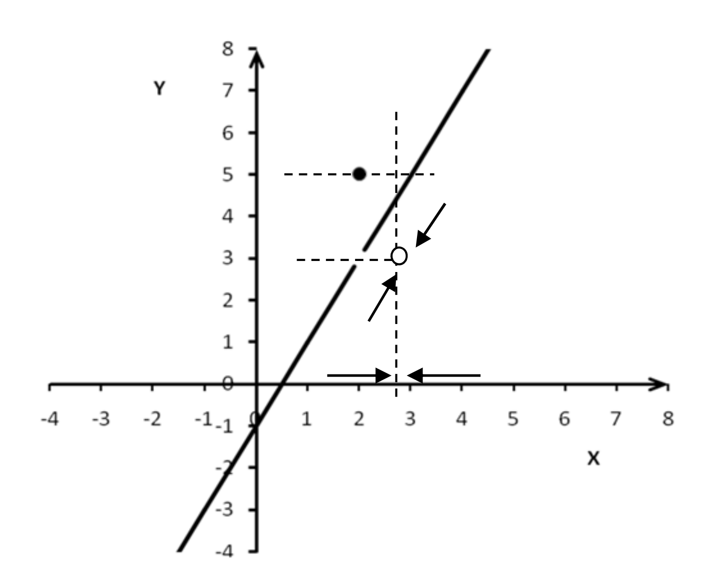
Ejemplo 1: Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

1° Se debe graficar la función.



2° Se debe analizar el valor al que la función tiende cuando x tiende al valor 2. Esto se hace acercandonos a x = 2 por la izquierda y por la derecha. Estos dos límites deben ser iguales para que exista el límite de la función. Observando la gráfica de la f(x) (ver la siguiente gráfica), cuando nos acercamos a 2 por la izquierda, vemos que f(x) se acerca al valor 3, y cuando nos acercamos a 2 por la derecha se observa que la gráfica de la función tiende al valor 3. Es decir:



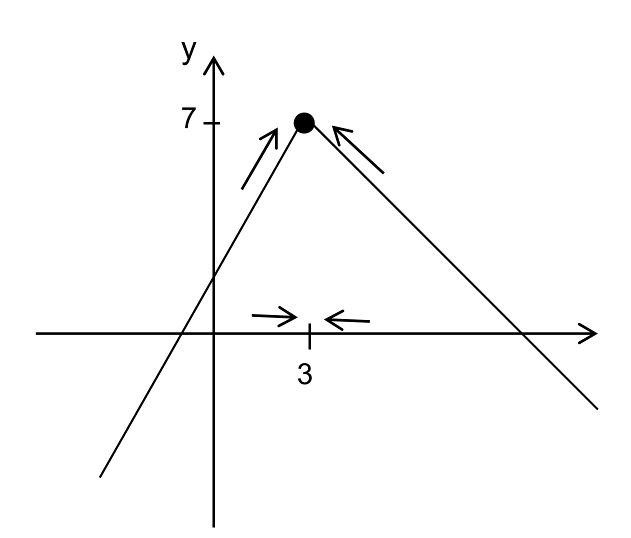
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3 \quad \text{(límite por izquierda de f(x))} \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3 \quad \text{(límite por derecha de f(x))}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$$

Para nuestro caso ambos límites son iguales a 3, por lo tanto, el límite de f(x) cuando x tiende a 2 existe y es igual a 3, a pesar que, f (2) = 5, según su definición.

Ejemplo 2: Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<3 \\ 10 - x & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

1° Graficamos la función.



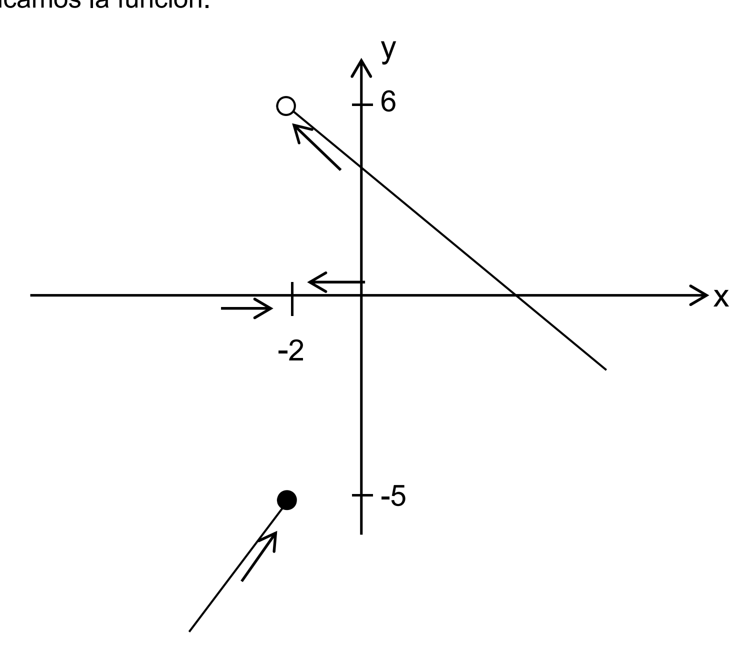
2° Analizamos el valor al que tiende la función cuando la variable x tiende a 3, acercándonos a 3 por la derecha y por la izquierda:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=7 \quad \text{(límite por izquierda de f(x))} \\ \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=7 \quad \text{(límite por derecha de f(x))}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=7 \text{ y coincide con el valor de f (3) = 7}$$

Ejemplo 3: Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}6x+7 & \text{si } x\leq -2 \\ 4 - x & \text{si } x>-2\end{cases}$$

1° Graficamos la función.



2° Analizamos el valor al que tiende la función cuando la variable x tiende a -2, acercándonos a -2 por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -5 \text{ límite de f(x)por izquierda}$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 6 \text{ límite de f(x)por derecha}$$

Como estos límites son distintos entonces **no existe** el límite de la función. sin embargo f(-2)

Continuidad

Decimos que una función dada por y = f(x) es continua en un punto de abscisa x=a si se cumplen las siguientes condiciones:

I. La función está definida en x = a, es decir, **a** pertenece al dominio de la función.

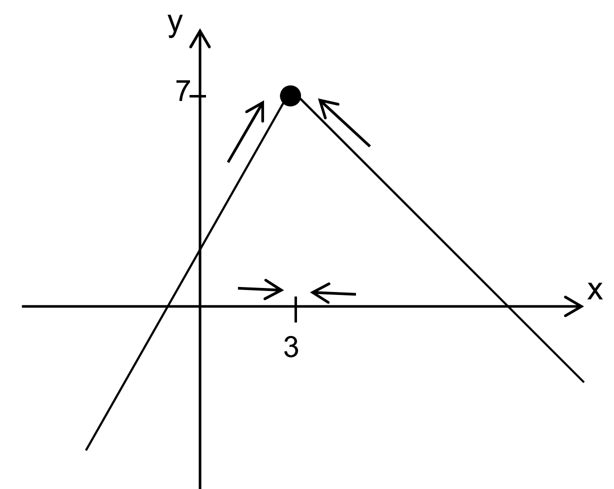
II. Existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$, y es un valor finito.

III. El límite para x tendiendo a **a** es igual al valor de la función en el punto de abscisa x = **a**:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo: En la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - \mathrm{x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



$I - f(3) = 7$

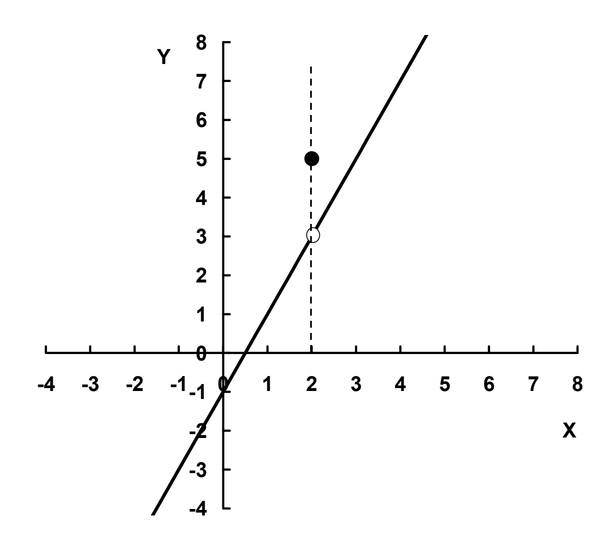
$$\left.\begin{array}{l} II - \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 7 \\ \quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 7$$

$III - f(3) = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Podemos asegurar que la función es **continua** en x= 3.

Ejemplo: En la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



$I - f(2) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} II - \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3 \\ \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$$

$III - f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

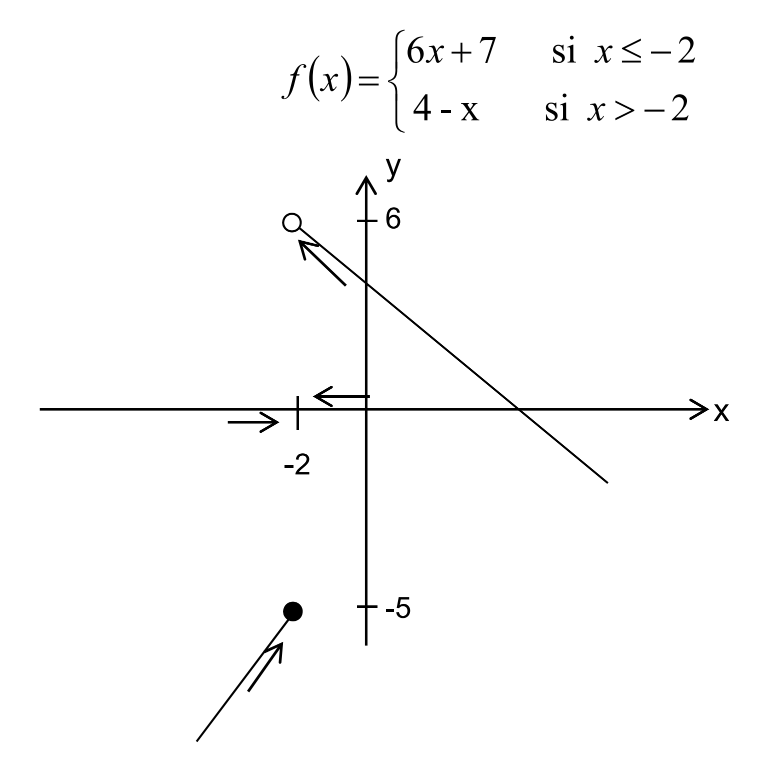
En este caso la función **no** es **continua** en x = 2. Como existe el límite de la función cuando x tiende a 2, esta discontinuidad recibe el nombre de DISCONTINUIDAD EVITABLE.

Para evitar esta discontinuidad, se redefine la función haciendo coincidir el valor de la función en x= 2 con el valor del límite.

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\neq 2\\ 3 & \text{si } x=2\end{cases}$$

Ejemplo: En la función:

$$f(x)=\begin{cases}6x+7 & \text{si } x\leq -2\\ 4\text{ - x} & \text{si } x>-2\end{cases}$$



$I - f(-2) = -5$

$$\left.\begin{array}{l} II - \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -5 \\ \quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{No existe el } \lim\limits_{x\to -2} f(x)$$

En este caso la función **no** es **continua** en x = -2. Como no existe el límite de la función cuando x tiende a - 2, esta discontinuidad recibe el nombre de DISCONTINUIDAD NO EVITABLE.

Actividad

1. Representar las funciones, calcular los límites indicados y analizar la continuidad.

1.1 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } x\le 1 \\ 2x & \text{si } x>1 \end{cases}$ $\qquad \underset{x\to 1}{lím}\, f(x)$

1.2 $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\le -2 \\ 3\text{-}x & \text{si } x>-2 \end{cases}$ $\qquad \underset{x\to -2}{lím}\, f(x)$

1.3 $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\ne 1 \\ 5 & \text{si } x=1 \end{cases}$ $\qquad \underset{x\to 1}{lím}\, f(x)$

1.4 $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x=1 \\ 7-2x & \text{si } x>1 \end{cases}$ $\qquad \underset{x\to 1}{lím}\, f(x)$

Enunciados de teoremas sobre el cálculo de límites

Dados los números reales m y n:

1) $\lim_{x\to a}(mx+n)=ma+n$

2) $\lim_{x\to a} n=n$

3) $\lim_{x\to a} x=a$

4) Si K ∈ R y existe el $\lim_{x\to a} x=$ entonces

$$\lim_{x\to a} Kf(x)=K\lim_{x\to a} f(x)$$

5) para $a\ge 0$, $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

6) Si existen los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces:

6.1) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

6.2) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$

6.3) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

6.4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)};\quad si\quad \lim_{x\to a} g(x)\ne 0$

Cálculo de límites

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x}{x+3}$

Aplicando sucesivamente los teoremas precedentes resulta:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x}{x+3} = \frac{(-1)^2+2(-1)}{(-1)+3} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

Si reemplazamos x por 3 resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Para eliminar la indeterminación debemos factorizar el numerador (y eventualmente el denominador) de modo de poner en evidencia el "factor responsable" del $\frac{0}{0}$. Dicho factor es (x – 3), ya que al reemplazar x por 3 da cero. En general si el límite para x tendiendo a **a** es de la forma (x – a).

Para factorizar el polinomio del numerador, hallamos las raíces de la ecuación:

$x^2 - 2x - 3 = 0$ Aplicando la expresión que nos permite calcular la raíces, obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad \Rightarrow x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -1$$

Luego

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1).(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 4$$

Actividad

1. Calcular los siguientes límites

1.1 $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + 2x - 1 =$

1.2 $\lim\limits_{x \to 0} 4x^3 + 3x =$

1.3 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 2}$

1.4 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9}$

1.5 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

1.6 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{3x + 12}{2x^3 + 128}$

1.7 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

1.8 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

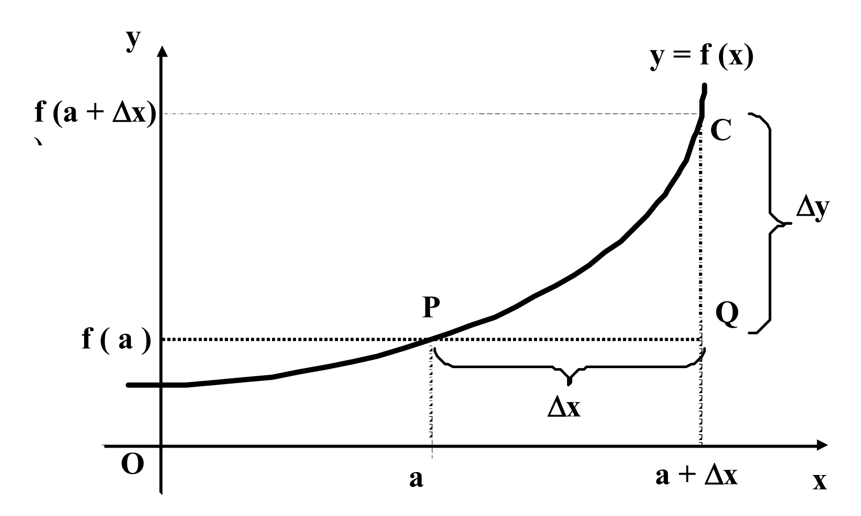
1.9 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 + 6x^2}{2x^4 - 15x^2}$ 1.10 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

1.11 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - t}}{2t}$ 1.12 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$

Incrementos

Dada una función por y = f(x) podemos interesarnos en conocer la rapidez de variación de dicha función en un punto dado de abscisa a.

Si la gráfica de la función es la representada en la figura, a la abscisa **a** le corresponde una ordenada que indicamos como f(a).



Si ahora queremos saber qué pasa con la función cuando nos corremos a la derecha o a la izquierda de **a**, debemos darle a la abscisa un incremento distinto de cero que llamaremos x.

Supongamos que el x elegido sea la medida del segmento PQ. Pasamos de ese modo a un nuevo punto de abscisa (a + x) dado que, como ya dijimos, la abscisa de un punto (en valor absoluto) mide la distancia entre dicho punto y el origen de las coordenadas.

La nueva ordenada será entonces f (a+ x). ¿Cómo se modificó la función?

Es evidente que el cambio que experimentó y = f(x) viene dado por la diferencia f(a+ x) – f(a). Precisamente a esa diferencia la llamamos incremento de la función y la simbolizamos con y.

Al cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ se lo denomina Cociente Incremental.

Definición de derivada

Si aplicamos límite con $\Delta x \to 0$ al cociente incremental, se obtiene, si existe, un número llamado derivada de la función en $x = a$, y se simboliza $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

y decimos que la función es derivable en el punto de abscisa **a**.

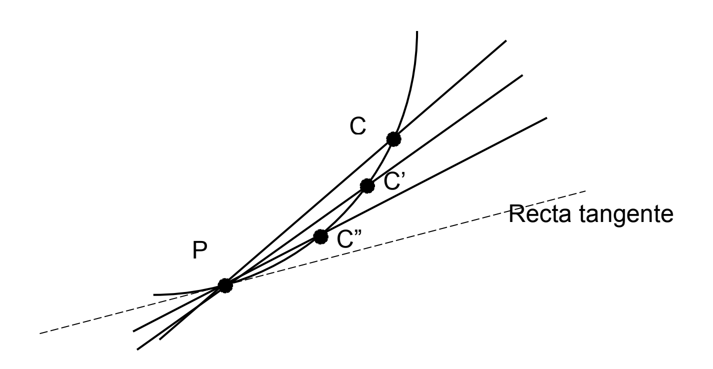
Si lo es en todos los valores de su abscisa se obtiene la función derivada, que en general se expresa:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica

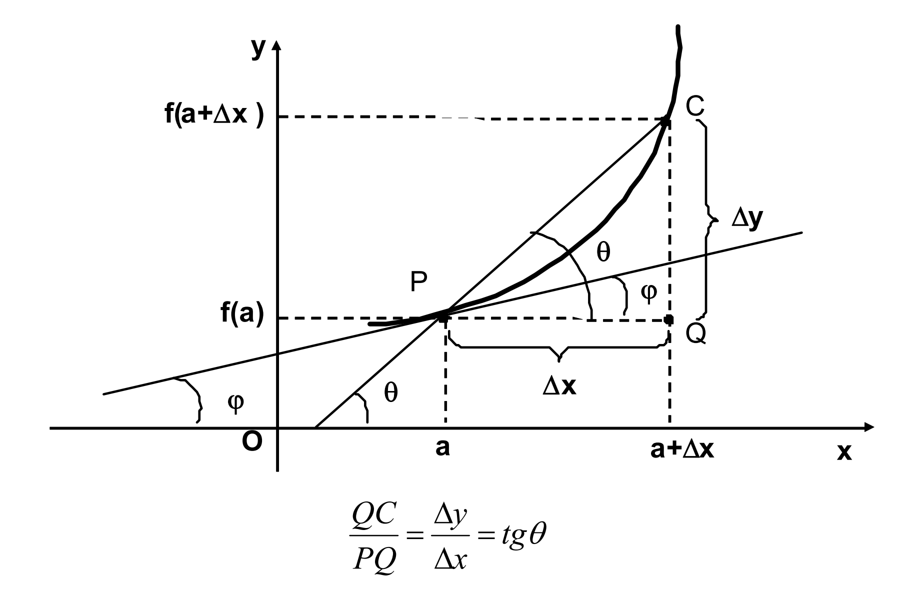
Una interpretación muy importante de la derivada es la que surge analizándola desde el punto de vista geométrico.

Pero antes de avanzar en este tema vamos a precisar qué entendemos por recta tangente a una curva en un punto. En la figura hemos trazado una curva y una recta secante a la misma que pasa por los puntos P y C.



Si dejamos fijo P y tomamos nuevas ubicaciones para C de modo que C', C", etc. recorran la curva acercándose cada vez más a P, vemos que las sucesivas secantes que pasan por PC', PC", etc., se aproximan a una posición límite que es la que definimos como recta tangente a la curva en P.

Luego si volvemos al gráfico en donde explicamos la noción de derivada vemos que en el triángulo $\overset{\Delta}{PQC}$



$$\frac{QC}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\theta$$

Por lo tanto la derivada en el punto P es:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\theta$$

Pero cuando $\Delta x \to 0$, C recorre la curva acercándose a P de modo que las secantes se aproximan a la recta tangente y si φ es la inclinación de ésta última entonces $\theta \to \varphi$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{C \to P} tg\theta = \lim_{\theta \to \varphi} tg\theta = tg\varphi$$

Luego la derivada en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente m de la recta tangente en el punto considerado, siendo la recta de ecuación: y = mx + n.

Reglas de derivación

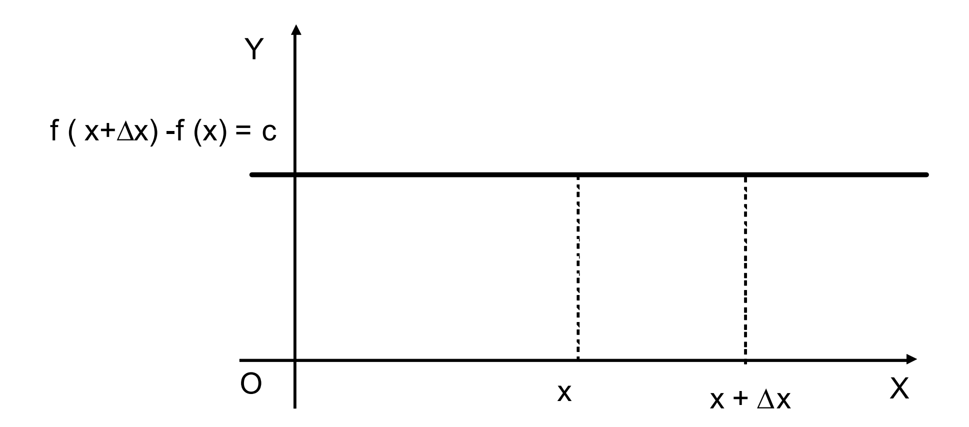
El cálculo de derivada aplicando la definición resulta en general muy complicado y es mejor hallar reglas de derivación que convenientemente combinadas permiten derivar en una forma más práctica.

Derivada de la función constante

Sea f (x) = c donde $c \in R$, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ en la función **constante**



La derivada de una constante es cero. Gráficamente corresponde a la pendiente de una recta paralela al eje x.

Derivada de la función identidad

Sea f (x) = x, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$f'(x) = 1$ La derivada de la variable independiente es igual a uno. (Pendiente de la recta a 45°)

Sea ahora, $f(x) = x^2$, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

Sea ahora, $f(x) = x^3$, luego

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Podemos, inferir la siguiente regla de derivación:

Si $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}$

Derivada de la suma y/o diferencia de funciones

Sea f(x) = u(x)   v(x) donde u = u(x) y   v = v(x) son dos funciones derivables.

$$f'(x) = (u(x) \pm v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x)$$

$$f'(x) = (u \pm v)' = u' \pm v'$$

La derivada de una suma o diferencia de funciones derivables es la suma o diferencia de sus derivadas. Esta regla se puede extender fácilmente a un número finito de funciones.

Ejemplo:

Si $f(x) = x^3 + x^2 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2 + 2x$

Fórmula para derivar productos y cocientes de funciones

Sea f(x) = u(x) • v(x)   donde u = u(x) y v = v(x) son dos funciones derivables.

Si se trata del producto de una constante por una función entonces $f(x) = k.q(x)$

$$f'(x) = k.q'(x)$$

La derivada de una constante (*k*) por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Para un cociente de dos funciones derivables debemos aplicar la fórmula.

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Tabla de derivadas

1.- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2.- $(u \bullet v)' = u' \bullet v + u \bullet v'$

3.- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$

4.- $(k \bullet f(x))' = k\, f'(x)$

5.- $(C)' = 0 \quad \text{con} \quad C = \text{cte.}$

6.- $(x^n)' = n.x^{n-1}$

7.- $(sen\, x)' = \cos x$

8.- $(\cos x)' = -senx$

9.- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

10.- $(e^x)' = e^x$

Actividad

1. Hallar la función derivada de

1.1 $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ 1.2 $f(x) = x^3$

1.3 $f(x) = \frac{1}{x}$ 1.4 $f(x) = 4 + \sqrt{x}$

1.5 $f(x) = x - \frac{2}{x}$ 1.6 $f(x) = 5$

1.7 $f(x) = 3x^3 + 5x - 2$ 1.8 $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{x}$

1.9 $f(x) = \frac{3}{x^3} + \sqrt{x}$ 1.10 $f(x) = 3\,x^2 + sen\,x$

1.11 $f(x) = \sqrt{x} - \cos x + e^x$ 1.12 $f(x) = e^x + tg\,x - \ln x$

Aplicaciones de la derivada

Es importante recordar el concepto de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica.

Definición: Se llama **derivada** de una función continua en un punto al límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

La derivada de la función f(x) en x_0 se representa por f ’(x_0) y de acuerdo con la definición es:

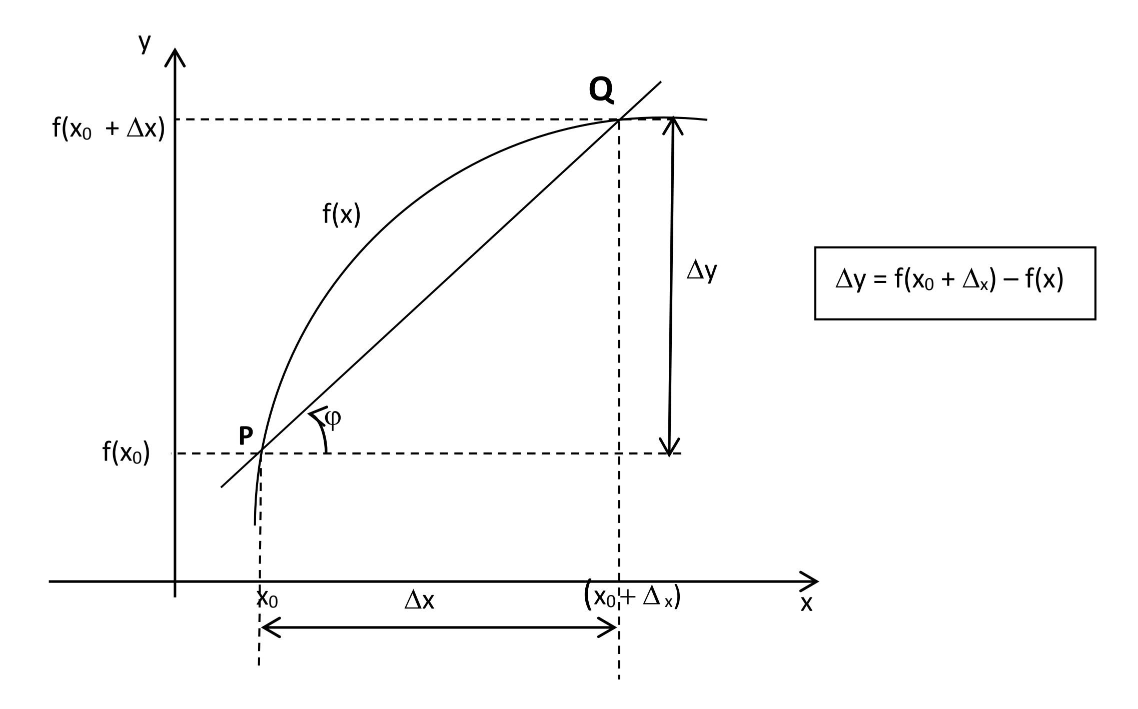
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Este límite finito es un número.

Interpretación geométrica

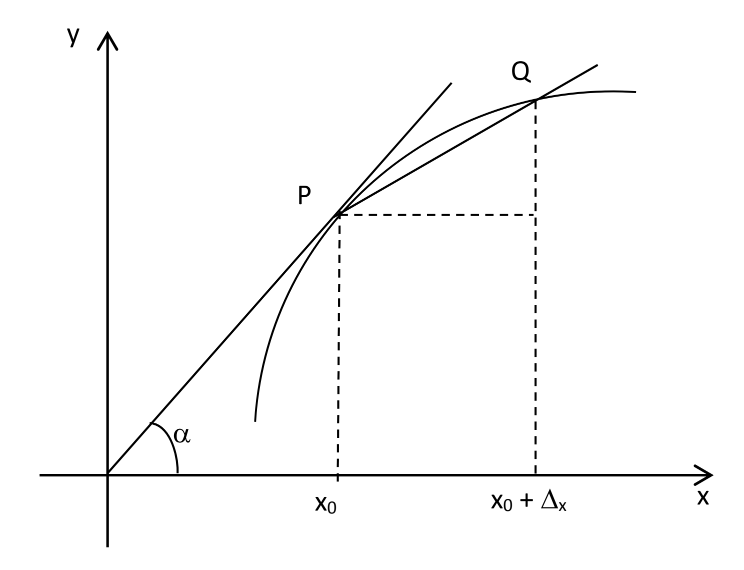
Sea f(x) una función continua que admite derivada en el punto de abscisa $\mathbf{x_0}$. A este valor le corresponde el punto **P** de la curva. Al valor de abscisa **(** $x_0 + \Delta x$ **)** le corresponde el punto Q de la curva.

Si se traza la recta $\overline{PQ}$ secante de la curva.



Observamos que: $tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$ es decir, el cociente incremental es la pendiente de la recta secante PQ

Cuando x se hace más pequeño, el punto Q se aproxima a P. Cuando $\Delta x \to 0$ la recta secante pasa a ser tangente en P y determina el ángulo α (con el semieje positivo de las x)



Por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando x 0, o sea la <u>derivada</u> <u>en</u> el punto de abscisa x_0, <u>es un número que mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P</u>.

Puntos críticos

Se llaman así a aquellos puntos en que la derivada es cero o no está definida.

Ejemplos:

a) Determinar los puntos críticos de la función f(x)= $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

Derivando se tiene: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ La derivada está definida para todo x.

Hacemos $f'(x) = 0$ $\quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$

Simplificando tenemos: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \qquad x_1 = 3 \qquad y \qquad x_2 = 1$$

Por lo tanto $f'(x)$ se anula para $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$, luego $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son las abscisas de los puntos críticos de f (x).

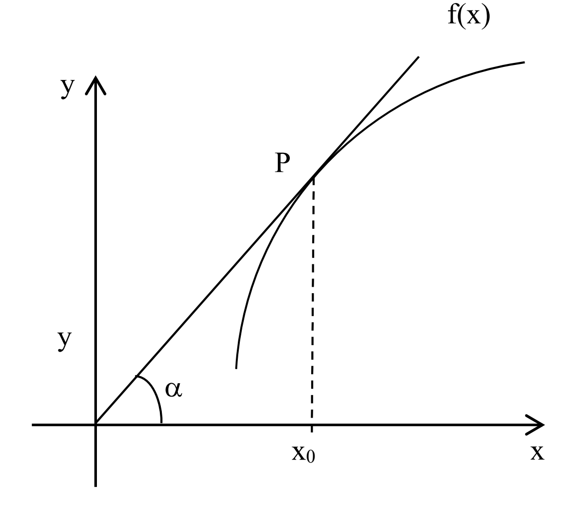
b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \quad f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

La derivada no está definida en x = 1; además se anula cuando el numerador es igual a cero, es decir:

$$x^2 - 2x = 0 \qquad x(x-2) = 0 \qquad x_1 = 0,\ \ x_2 = 2$$

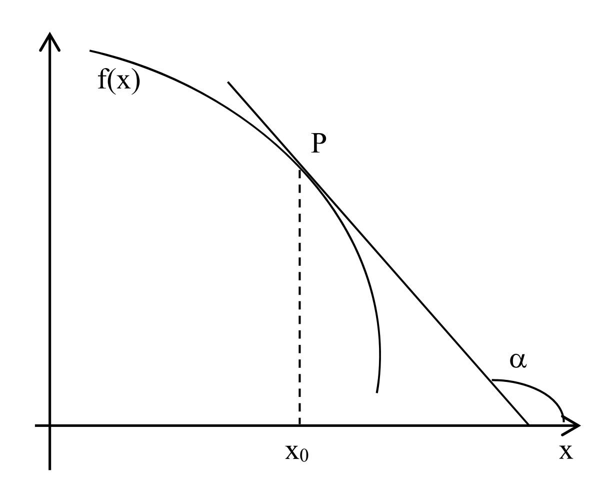
Por lo tanto la función tiene tres puntos críticos de abscisa: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Máximos y mínimos relativos



Si f ' (x 0) 0

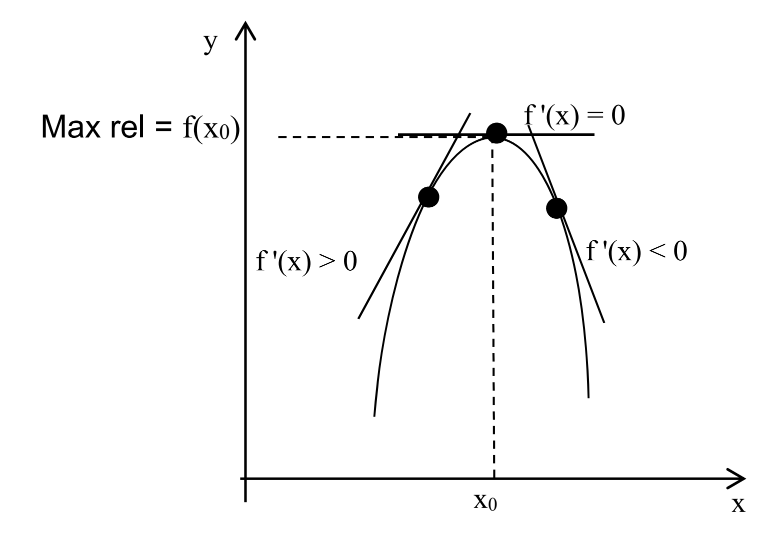
- es un ángulo agudo
- la función es creciente



Si f ' (x0) 0

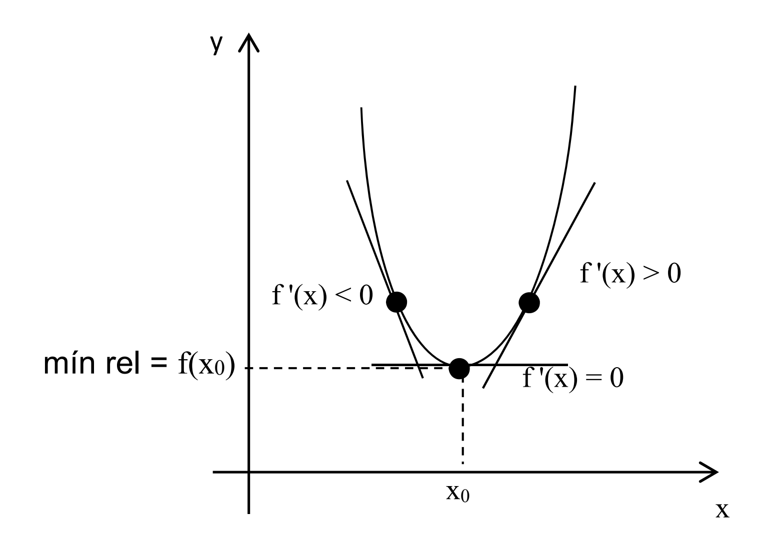
- es un ángulo obtuso
- la función es decreciente

Si la derivada de una función en un punto es positiva, la función es <u>creciente</u> en dicho punto; si la derivada es negativa, la función es <u>decreciente</u>.

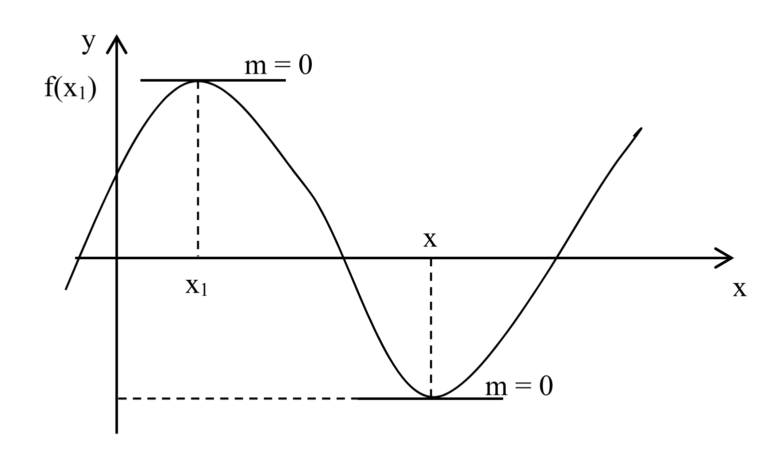


Si a la izquierda de un punto la derivada es positiva y a la derecha es negativa, en ese punto existe un **Máximo relativo**

Si a la izquierda del punto crítico, la derivada es negativa y a la derecha es positiva; en ese punto existe un **mínimo relativo.**

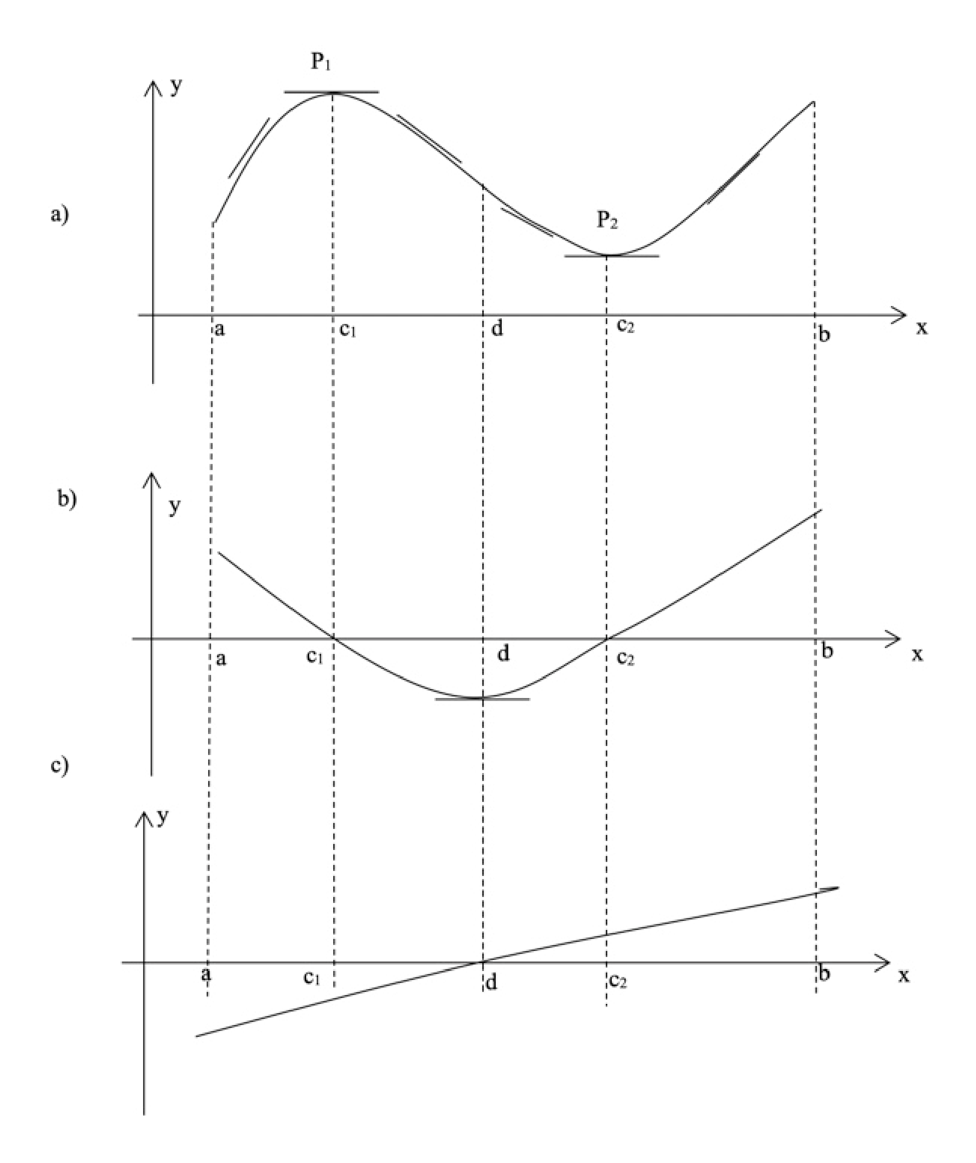


Si en el punto en que la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo existe derivada, ésta debe ser cero; es decir, la tangente en dicho punto es horizontal.



Estudio de la concavidad

La siguiente figura muestra, en la parte a), la gráfica de una función, que admite derivadas sucesivas, que es cóncava hacia abajo entre los puntos a y d y es cóncava hacia arriba entre los puntos d y b. El gráfico b) muestra en forma aproximada, la gráfica de la función derivada primera y en c), también en forma aproximada, la gráfica de la derivada segunda de la función.



Vemos que en el intervalo en el que la curva es cóncava hacia abajo la función derivada segunda es negativa, y en el intervalo en que la curva es cóncava hacia arriba, la función derivada segunda es positiva. El punto de la gráfica en el que cambia el sentido de la concavidad se llama **Punto de Inflexión.**

Conclusión: Si una función tiene derivada segunda en un intervalo (a , b)

Si $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia arriba.

Si $f''(x) < 0$, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo.

Definición: Diremos que el punto P(d, f(d)) de la gráfica de la función es un Punto de Inflexión si existe la recta tangente a la curva en P, y en él cambia el sentido de la concavidad de la gráfica.

Técnica para realizar el estudio completo de una función

1º. Se determinan los valores críticos de la función, o sea los puntos en los cuales $f'(x) = 0$, o no existe.

2º. Se determinan los valores críticos de f ' (x). O sea, los puntos en los cuales $f''(x) = 0$, o no existe.

3º. Se subdivide el dominio de la función, en subintervalos, teniendo en cuenta los valores críticos de
f (x) y de f ' (x).

4º. Se analiza el signo de la derivada primera de la función en cada subintervalo, para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

5º. Se determinan los máximos y mínimos relativos de la función.

6º. Se analiza el signo de la derivada segunda de la función en cada subintervalo, para determinar la concavidad de la función.

7º. Se determinan los puntos de inflexión de la función.

8º. Se grafica en forma aproximada la función.

Ejemplo.

Realizar el estudio completo de la función: $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x + 1$

Hallamos la derivada primera de la función: $f'(x) = 3x^2 – 12x + 9$

Igualamos a cero la derivada primera de la función

$$f'(x) = 0 = 3x^2 – 12x + 9 = x^2 – 4x + 3$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

los valores de x son: $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

- Hallamos la derivada segunda de la función, la igualamos a cero y calculamos los valores de las abscisas de los puntos críticos de f '(x), para obtener los posibles puntos de inflexión de f(x).

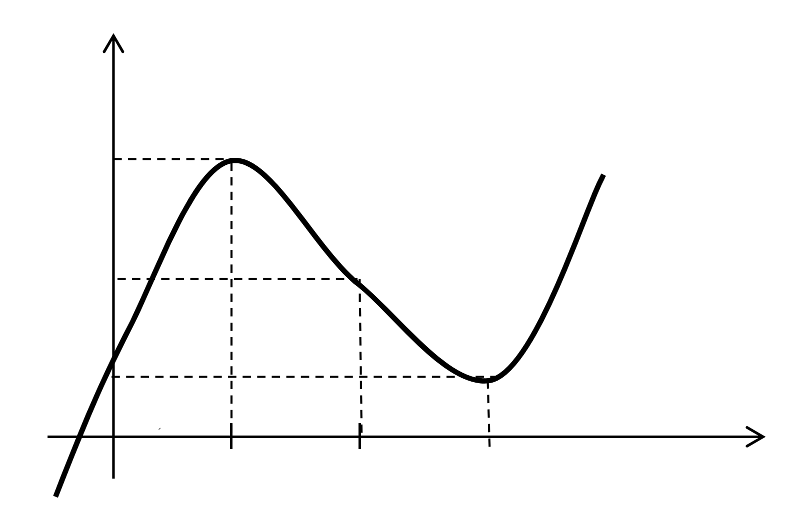
$$f''(x) = 6x^2 - 12$$

$$f''(x) = 0 = 6x^2 – 12 \Rightarrow x = 2$$

Confeccionamos una tabla en la cual volcamos el estudio de los signos de las derivadas primera y segunda en los subintervalos en que dividimos el dominio de la función y las conclusiones que obtenemos.

	f(x)	f '(x)	f ''(x)	Conclusiones
(- , 1)		+	-	La función crece y es cóncava hacia abajo
1	5	0	-	Existe un Máximo Relativo
(1 , 2)		-	-	La función decrece y es cóncava hacia abajo
2	3	-	0	Existe un Punto de Inflexión
(2 ,3)		-	+	La función decrece y es cóncava hacia arriba
3	1	0	+	Existe un Mínimo Relativo
(3 ,)		+	+	La función crece y es cóncava hacia arriba

Graficamos en forma aproximada la función.



Actividades

1. Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones:

1.1 f (x) = $x^2 - 5x + 6$

1.2 f (x) = $x^{4/3} + 4x^{1/3}$

1.3 f (x) = $\sqrt[3]{x-2}$

1.4 f (x) = $x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 9$

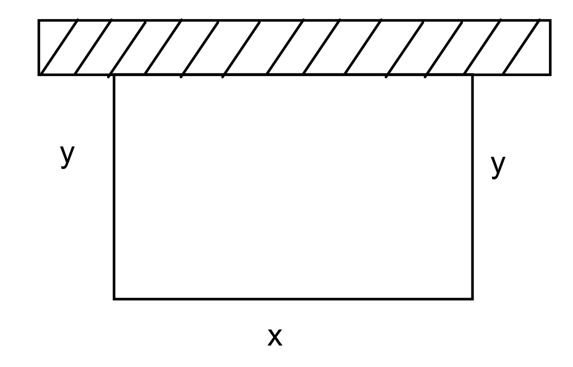
2. Realizar el estudio completo de las siguientes funciones, determinando: los puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad y los extremos relativos. Realizar la gráfica aproximada de la función.

2.1 f (x) = $x^2 + 4x + 6$ 2.2 f (x) = $2x^3 - 3x^2 - 36x + 30$

2.3 f (x) = $x^4 - 2x^2 - 3$ 2.4 f (x) = $2x^2 - x^4$

Problema de aplicación

Con un rollo de alambre de 48 m. de longitud, se quiere construir junto a una pared un recinto cuya superficie sea máxima.



Sup. rectángulo = *base x altura* $\therefore$ $S(x, y) = x \bullet y$ (1)

Debemos construir una función de acuerdo a las condiciones del problema.

x e **y** están vinculadas de manera tal que podemos escribir una en función de la otra.

De acuerdo con el problema será $2y + x = 48m \quad \therefore \quad y = 24 - \frac{x}{2}$

Reemplazando en (1)

$$S(x, y) = x \bullet y \quad \Rightarrow \quad F(x) = x \bullet \left(24 - \frac{x}{2}\right) = 24x - \frac{x^2}{2}$$

$F(x) = 24x - \frac{x^2}{2}$ Esta es la función que debemos maximizar.

$$F'(x) = 24 - x$$

Luego $F'(x) = 0 \Rightarrow 24 - x = 0 \Rightarrow x = 24m.$

Para demostrar que es un máximo, calculamos

$F''(x) = -1 < 0$ $\therefore$ sólo existe un Máximo y corresponde a x = 24.

Por lo tanto, será $y = 24 - \frac{24}{2} \Rightarrow y = 12m.$

$$Superficie\ máxima = x \bullet y = 24m \bullet 12m = 288m^2$$

Actividades

1. Resolver el problema anterior aprovechando el ángulo de una pared.

2. Con 400 m. de alambre se quiere delimitar una superficie rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

3. Con una hoja de cartón de 54 cm. de lado se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada y capacidad máxima. Calcular las dimensiones que debe tener la caja.

4. De todos los rectángulos de 25 cm2 de superficie. ¿Cuál es el de menor perímetro?

5. Sobre la orilla de un canal se necesita limitar un terreno rectangular, alambrando los tres lados que no pertenecen a la orilla. Para construir el alambrado se deben utilizar 1.800 m. de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el terreno para que su superficie sea máxima?

6. Entre todos los pares de números positivos cuyo producto es 144, hallar dos cuya suma sea máxima.

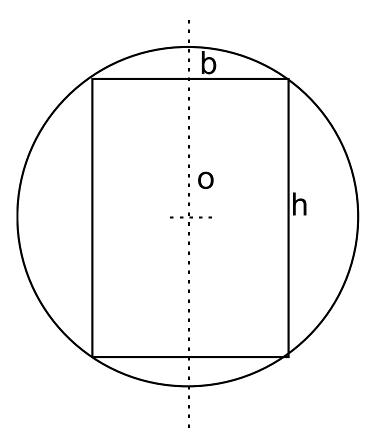
7. El momento flector de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida está dado por la expresión:

$$M_x = q\frac{1}{2}x - qx.\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

Hallar el momento flector máximo y su ubicación

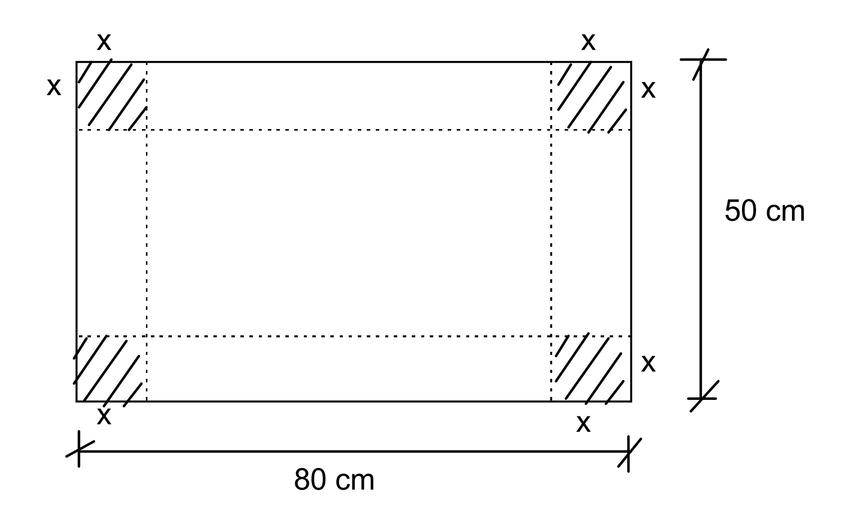
8. De un tronco circular se ha de aserrar una viga de sección rectangular, de modo que para una longitud dada su resistencia represente un máximo.

RESISTENCIA: R = cuadrado de la altura x ancho sección transversal



R = h^2 . b   Rta.: Resistencia máxima cuando $b = 2\frac{r}{3}\sqrt{3}$

9. Con una hoja de cartón de 80 cm. de largo y 50 cm. de ancho, se quiere construir un caja rectangular sin tapa, cortando los cuadrados de los vértices, como se indica en la figura y levantando las aletas de los costados. Calcular las dimensiones de la caja para que el volumen de la misma sea el máximo.



Diferenciales

Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$

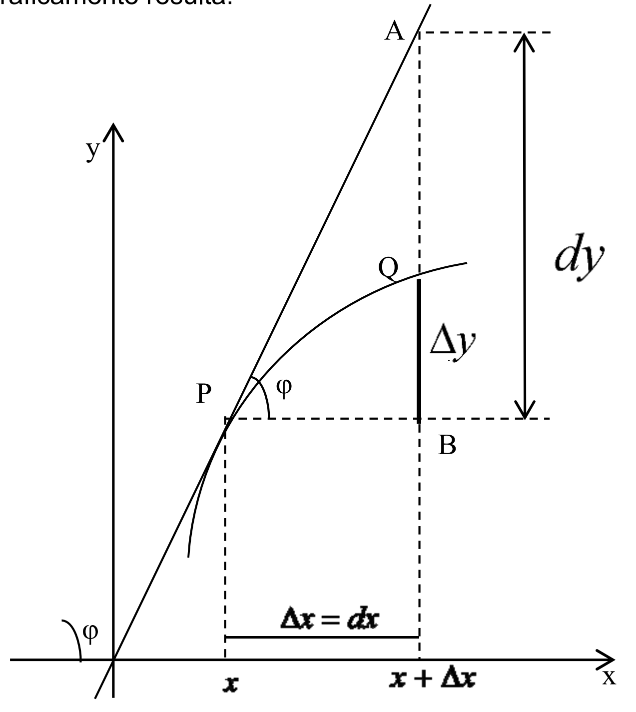
Definimos el diferencial de x y el diferencial de y que simbolizaremos **dx** y **dy** respectivamente.

Por definición: $dx = \Delta x$

$$dy = f'(x)\,\Delta x \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$$

es decir, el valor de dx coincide con el incremento de **x** y el valor de dy depende de la derivada de la función en x y del incremento x.

Gráficamente resulta:



Si por el punto P trazamos la recta tangente a la función f(x) y la prolongamos hasta la intersección de la vertical trazada por la abscisa (x + Δx), tenemos el punto A. El segmento $AB = dy$

Del gráfico $tg\,\varphi = \dfrac{dy}{dx}$

Como φ es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la función, entonces

$$tg\,\varphi = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\; dy = f'(x) \bullet dx$$

Actividades

1. Hallar el dy de:

1.1 $y = x^3 + 5x$ 1.2 $y = sen\,x + \ln x$

2. Utilizar diferenciales para estimar el incremento en el volumen de un cubo cuando sus lados cambian de 10 cm a 10,1 cm. ¿Cuál es el incremento exacto del volumen?

3. ¿En cuánto aumenta aproximadamente el volumen de una esfera, si su radio de 15 cm. se aumenta en 2 mm.?

Bibliografía

Swokowski, E.,(1987). Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. México

Leithold, L., (1987). Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla. México

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

CAPITULO 11
Calculo integral

Stella Maris Arrarás y Viviana Beatriz Cappello

Integral Indefinida

Estamos acostumbrados a decir que el producto y el cociente son operaciones inversas. Lo mismo sucede con la potenciación y la radicación. Vamos a estudiar ahora la operación inversa de la diferenciación.

Dada la función f (x), llamaremos función primitiva de ésta y la designamos con F (x) a toda función tal que

$$F'(x) = f(x)$$

$$dF(x) = f(x).dx$$

Ejemplo: si $f(x) = x^3$, entonces una función primitiva de f (x) es:

$$F(x) = \frac{x^4}{4}$$

ya que $F'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x)$

o bien $dF(x) = F'(x).dx = x^3 dx = f(x).dx$

Otras funciones primitivas distintas de f(x) son, por ejemplo:

$$y = \frac{x^4}{4} + 5 \quad \text{o} \quad y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2};$$

esto es así porque la derivada de una constante es igual a cero.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

"TODAS las funciones que tienen igual derivada difieren entre sí en una constante "

Hallada una primitiva de f (x), todas las primitivas de f (x) difieren de la calculada en una constante.

La operación de encontrar todas las primitivas de f(x) es la antidiferenciación, que simbolizamos:

$$\int f(x)\; dx = F(x) + C$$

en la que la ***C*** es una constante arbitraria, debiendo leerse el miembro de la izquierda **"integral de f de x, diferencial de x "**.

Tabla de Integrales

A partir de la tabla de derivación podemos obtener reglas para la integración:

$$\int dx = x + C$$

$$\int -sen\ x\ dx = \cos x + C$$

$$\int k\ dx = k\,x + C$$

$$\int e^{x}\ dx = e^{x} + C$$

$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C$$

$$\int x^{n}\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int cos\ x\ dx = senx + C$$

Ejemplos

Si calculamos las integrales:

1. $\int \left(8x^3 + \sqrt{x} - 2\right)dx = \int (8x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 2)\,dx = \frac{8x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2x + C = 2x^4 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2x + C$

2. $\int \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)dx = \int \left(\frac{1}{2} - 3\,x^{-2} + 4\,x^{-4}\right)\ dx = \frac{1}{2}\,x - 3\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C =$

$= \frac{1}{2}x - 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + 4\,\frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{x} - \frac{4}{3\,x^2} + C$

Actividades

1. Hallar las siguientes integrales.

1.1 $\int \left(1 - \frac{x^3}{2} + x^5\right)\ dx$

1.2 $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)\ dx$

1.3 $\int \left(x^2+2\right)^2 dx$

1.4 $\int 3x^2\left(x^2-2\right)\ dx$

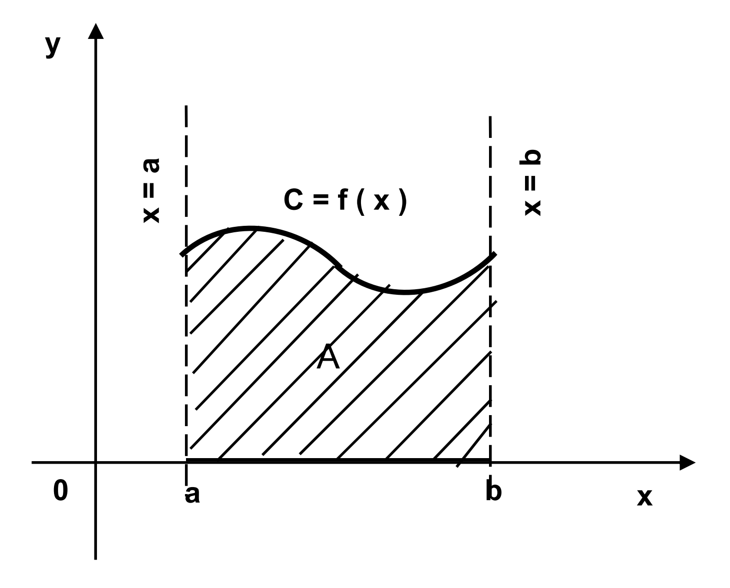
1.5 $\int \frac{x^3-1}{x^2}\ dx$

Integral Definida

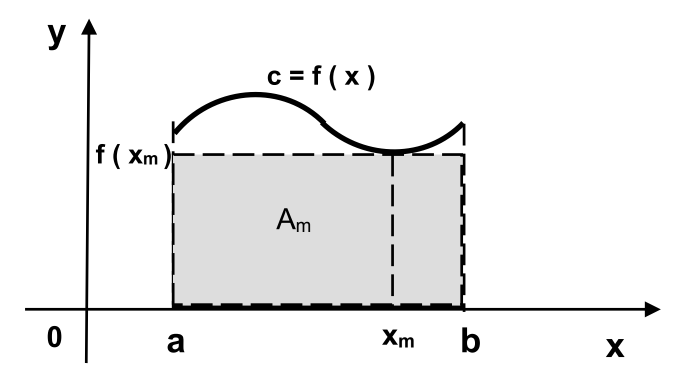
Aplicación de la Integral Definida al Cálculo de Áreas Planas.

La integral definida, surge como una necesidad de calcular el área de recintos planos encerrados por curvas. Por tal motivo generalmente se presenta a la integral definida a través del concepto de cálculo de un área. Este camino es bastante lógico y, especialmente muy intuitivo.

Supongamos que queremos calcular el área encerrada por la curva C de la figura, representativa de la función f(x), el eje **x** y las rectas de ecuación **x = a** y **x = b**.



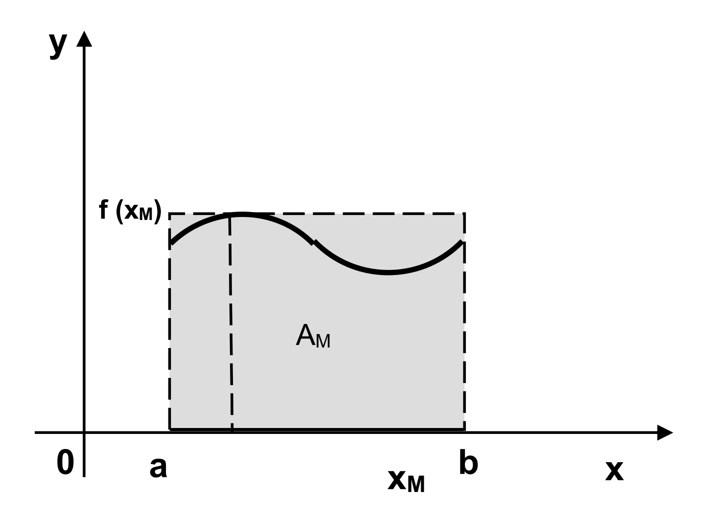
Una grosera aproximación de dicha área consistirá en tomar el área del rectángulo de lados **ab** y **f(x_m)** siendo **x_m** la abscisa para la cual la función **f(x)** asume su valor mínimo en el intervalo considerado; evidentemente tal área será menor que el área que pretendemos medir.



Si llamamos A_m el área que queremos calcular. Ésta será el producto de f (x_m) por (b – a).

Es decir: $Am = f(x_m) \bullet (b-a)$

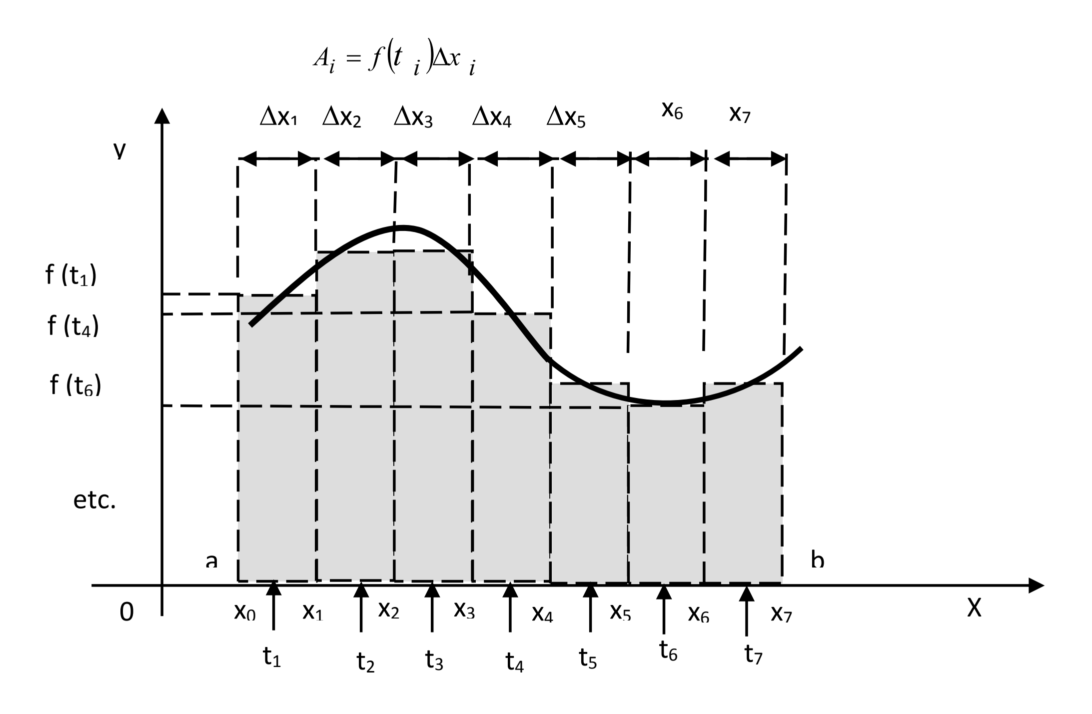
Algo similar ocurre si tomamos el rectángulo de lados **ab** y **f(x_M)** siendo **x_M** la abscisa donde la función asume su valor máximo; en tal caso el área calculada supera el valor del área bajo la curva.



Es decir: $A_M = f(x_M) \bullet (b-a)$

Resulta evidente que una aproximación mejor se obtiene haciendo una partición P_n del $[a,b]$, y tomando como área la suma de las áreas de los rectángulos elementales.

$A_i = f(t_i)\Delta x_i$



Como se ve en la figura el área aproximada está dada por la suma

$$A^t \approx \sum_{i=1}^{7} A_i \qquad \text{pero} \qquad A_i = f(t_i)\Delta x_i$$

entonces: $$A^t \approx \sum_{i=1}^{7} f(t_i)\Delta x_i$$

Intuitivamente nos damos cuenta que el área aproximada A^t se ajustará cada vez más al área A bajo la curva a medida que mayor sea el número de intervalos de la partición. También es intuitivo que en el límite, cuando el número de los rectángulos elementales tiende a , la suma dará exactamente el área A.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i = \int_a^b f(x)\ dx$$

Regla de Barrow

Para calcular la Integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ se aplica la Regla de Barrow

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

Recordemos que F(x) es una primitiva de f (x).

Esta expresión liga el concepto de integral definida y el de antiderivada, que como sabemos, se calcula mediante integración indefinida. El uso de esta regla simplifica notablemente el cálculo de las integrales definidas.

Resulta cómodo usar la notación: $F(b) - F(a) = F(x)\ \Big]_a^b$

con ello la regla de Barrow puede escribirse: $\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\ \Big]_a^b$

Ejemplo

Hallar $\int_{-1}^{2} x^2\ dx$ $\qquad \int_{-1}^{2} x^2\ dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$

Actividad

1. Calcular las siguientes integrales definidas.

1.1 $\int_0^8 x^3 \quad dx =$

1.2 $\int_0^1 (1-\sqrt{x}) \quad dx =$

1.3 $\int_2^4 \frac{dx}{x^2} =$

Cálculo de Áreas por Integración Definida

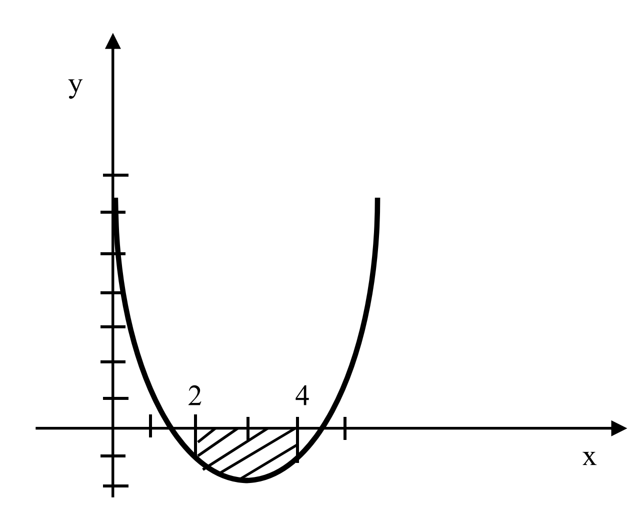
Las áreas, siendo números que representan la medida de una superficie (es decir el número de veces que cabe la unidad de superficie en un determinado recinto), no pueden ser negativas.

Las integrales definidas en cambio sí pueden dar como resultado un número negativo. Esto ocurre precisamente toda vez que la función asume valores negativos en la totalidad del intervalo de integración.

Ejemplo:

Calculemos la integral de la función

$f(x)=(x-3)^2-2$ entre los valores 2 y 4.



Dentro de ese intervalo la función toma exclusivamente valores negativos y el valor resultante de la integración es un número negativo; sin embargo el área entre la curva y el eje no pue-

de ser negativa; en consecuencia debe tomarse el valor absoluto del resultado de la integral cuando lo que se está calculando es un área.

El valor negativo de la integral en estos casos lo único que indica es que la curva está por debajo del eje x.

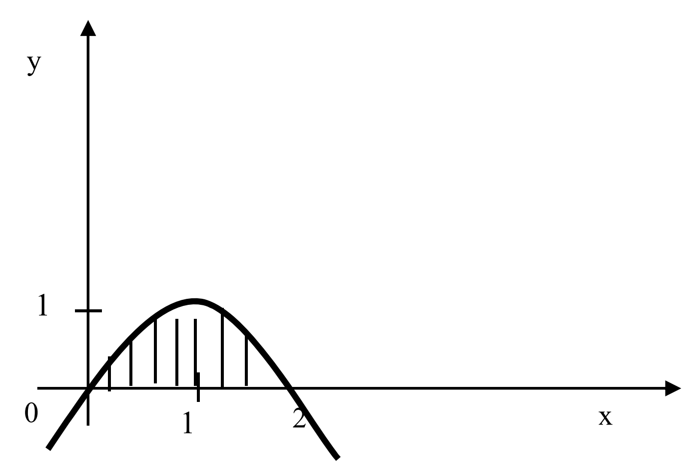
La verdadera dificultad se presenta cuando a lo largo del intervalo de integración la función cambia de signo de modo que parte de la curva queda debajo del eje **x** y parte encima de él.

Si no se tiene la precaución de graficar la curva y con ello evidenciar este hecho, se cometerá el error de suponer que la integral está dando el área entre la curva y el eje **x**, cuando en realidad el resultado de la integral estará dando la diferencia entre las áreas que están por encima del eje **x** y las que están debajo.

En el ejemplo, ocurriría esto si integramos entre 0 y 6. Para evitar este inconveniente debemos dividir el intervalo de integración en tantos subintervalos como sea necesario a fin de tener subintervalos dentro de los cuales la función tenga un mismo signo; (es decir entre “ceros” o raíces de la función) integrar entonces separadamente sobre cada intervalo y sumar luego los valores absolutos de cada resultado.

Ejemplo 1

Hallar el área limitada por $y = 2x - x^2$ y el eje x.



Hallamos las intersecciones de la curva con el eje x.

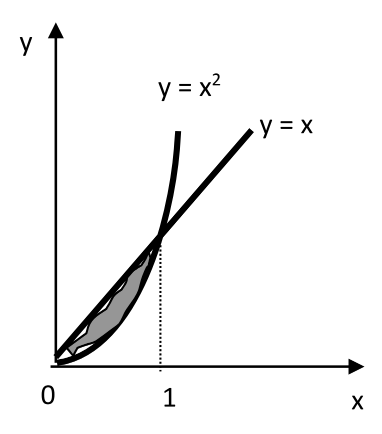
$$2x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2 - x) = 0$$

resulta $\quad x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 2$

Calculamos la integral definida en $[0,2]$

$$A = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\, dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2: Calcular el área encerrada entre la recta **y = x** y la parábola **y = x²**



El área deberá obtenerse como diferencia entre el área bajo la recta y el área bajo la parábola, entre los límites que marcan las intersecciones de ambas gráficas, es decir:

$$\mathbf{x^2 = x \qquad x^2 - x = 0}$$

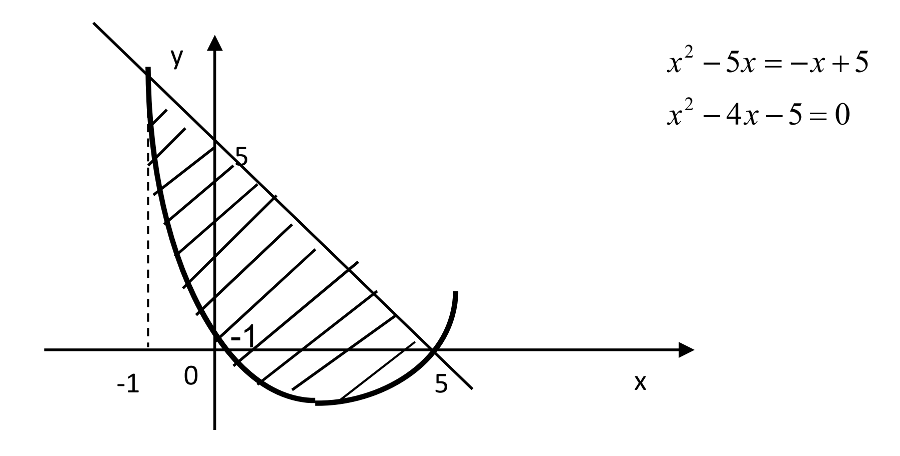
que tiene como raíces **0** y **1**

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 3:

Hallar el área encerrada por la recta $y = -x + 5$ y la parábola de ecuación $y = x^2 - 5x$

Hallamos por igualación las intersecciones entre ambas gráficas



$$x^2 - 5x = -x + 5$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos $x_1 = -1$ y $x_2 = 5$ que determinan los extremos de la integración.

Para hallar el área encerrada, calculamos la integral definida de la diferencia de las ordenadas de las dos curvas.

$$A = \int_{-1}^{5} \left[(-x+5)-\left(x^2-5x\right)\right]\, dx = \int_{-1}^{5} \left(-x^2+4x+5\right)\, dx = -\frac{x^3}{3}+2x^2+5x \Bigg]_{-1}^{5} = 36$$

De la gráfica conjunta de las dos ecuaciones puede visualizarse que el área *bajo* la curva **y = x² - 5x** entre los puntos de abscisas **0** y **5** está ubicada debajo del eje de las **x,** debiendo en consecuencia resultar negativa la integral entre esos límites. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que al efectuar la diferencia entre el área determinada por la recta y el área determinada por la parábola, la correspondiente a la parábola ingresó en el cálculo de la integral con signo negativo, es decir restando, lo que significa que la parte positiva del área correspondiente se restará, en tanto que la parte negativa se sumará al efectuar el cómputo total.

Resulta entonces que el cálculo que hemos realizado es equivalente a:

a) Computar la $\int_{-1}^{5}(-x+5)\, dx$

b) Restar la $\int_{-1}^{0}(x^2-5x)\, dx$

c) Sumar el valor absoluto de la $\int_{0}^{5}(x^2-5x)\, dx$

(parte de la parábola debajo del eje x)

Actividades

1. Hallar el área limitada por:

1.1 $y = x^2 - 3x$ y el eje x.

1.2 $y = \frac{x^2}{4} - 1$ y el eje x.

1.3 $y = x^2 + x - 2$ y = 0 ; x = 0 ; x = 2

1.4 $y = x^2 - 9$ el eje x ; x = 1 y x = 4

2. Calcular el área comprendida entre las curvas.

2.1 $y = x - x^2$ e $y = -x$

2.2 $y = x^2 - 2$ e $y = 6 - x^2$

2.3 $y = 9 - x^2$ e $y = x + 7$

Bibliografía

Swokowski, E.,(1987). Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. México

Leithold, L., (1987). Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla. México

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Los autores

Arrarás, Stella Maris

Ingeniero en Construcciones FI UNLP. Ingeniera Civil FI UNLP. Capacitación Docente ISFC DYEGEP 5848. Actualmente Profesora Titular Ordinaria en Cátedra 4 de Matemática en FAU UNLP. Profesora Asociada Ordinaria en Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática en FCNyM UNLP. Profesora Titular Ordinaria en Análisis Matemática 1 UTN FRLP. Profesora Adjunta Ordinaria en Álgebra y Geometría Analítica en UTN FRLP. Trabajó en el nivel terciario de la DGCyEBs As. Trabajó en el nivel secundario en el Colegio Sagrado Corazón de Jesús de La Plata. Trabajó en la Dirección de Obras y Proyectos de la MLP. Integrante de comisiones asesoras de concursos de auxiliares docentes y profesores en UTN FRLP y UNLPHa participado de Congresos Nacionales e Internacionales de Enseñanza de la matemática. Es autora de varios apuntes de cátedra de la UNLP y UTN FRLP.

Cappello, Viviana B.

Ingeniera en Sistemas de Información de UTN FRLP.Analista Universitario en Sistemas de UTN FRLP. Cursó el profesorado de Matemática en FaHCE UNLP.Cursó la Carrera Docente Universitaria UNLP. Maestría en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Finfo UNLP. Magister en Tecnología Educativa, UAM España. Actualmente Profesora Adjunta Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM UNLP. JTP ordinaria de la FAU UNLP. Profesora Asociada ordinaria de Álgebra y Geometría Analítica en la UTN FRLP. Directora del Laboratorio de MatemáTICa en la UTN FRLP. Secretaría del Departamento de Ciencias Básicas de la FRLP. Ha escrito un libro con la Edulp. Ha escrito con la Editorial Académica Española. Ha participado de Congresos Nacionales e Internacionales de Enseñanza de la matemática. Ha participado en Proyectos de extensión de la UNLP. Mantiene y administra los recursos TICs utilizados por la cátedra desde hace más de quince años.

Chong Arias, Carlos D.

Ingeniero en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional FRLP. Profesor titular de Álgebra y Geometría Analítica. Profesor Asociado de Análisis Matemático I de la UTN FRLP. Ayudante Diplomado ordinario de la cátedra 4 de matemática de la FAU UNLP. Secretario de Tecnología de la Información y la Comunicación de la UTN FRLP. Docente investigador del Grupo IEC, Investigación y Enseñanza de las Ciencias. Ha dirigido varios Laboratorios de

Investigación en la UTN FRLP. Ha participado de númerosos congresos nacionales en el área de la Informática y la Matemática.

Curell, Miguel

Es Profesor de Física y Matemática graduado de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de UNLP. En la actualidad jefe de trabajo práctico ordinario en la unidad pedagógica de matemática y elementos de matemática de la FCNyM de la UNLP. Ayudante diplomado ordinario taller vertical Nº 4 de la FAU de la UNLP. Docente de física del Colegio Nacional de la UNLP. Profesor del profesorado de Física del I.S.F.D Nº95 de la ciudad de La Plata. Profesor de física en diferentes instituciones educativas dependientes de la DGCyE de la provincia de Buenos Aires

Istvan, Romina M.

Ingeniera en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional. Culminando su tesis de Magister en Tecnología Informática Aplicada en Educación en la Universidad Nacional de La Plata. Ayudante Diplomado ordinaria de la cátedra 4 de matemática de la FAU UNLP. Docente investigador del Grupo de Investigación y Desarrollo Aplicado a Sistemas Informáticos y Computacionales (GIDAS) de la UTN Facultad Regional La Plata. Docente en la UTN y en la UNLP con una antigüedad de 15 años.

Libros de Cátedra

Matemática en Arquitectura : parte 2 : un aporte para la formación en matemática de los estudiantes de Arquitectura y Urbanismo / Stella Maris Arraras ... [et al.] ; coordinación general de Stella Maris Arraras ; Viviana Cappello. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2020.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-34-1940-3

1. Matemática. 2. Geometría. 3. Arquitectura . I.Arraras, Stella Maris, coord. II. Cappello, Viviana, coord.
CDD 516.1

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2020
ISBN 978-950-34-1940-3





